<u>CAPÍTULO II:</u> Variables Aleatorias Discretas

Con frecuencia el interés recae en resumir con un número el resultado de un experimento aleatorio.

Definición:
Una **variable aleatoria** X es una función que asigna un número real a cada resultado del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio E.
Es decir, una variable aleatoria X es una función $X: \Omega \rightarrow \Re$ que a cada elemento $w \in \Omega$ le asocia un número real, $X(w) = x$.

El nombre de *variable* se debe a que toma distintos valores y el de *aleatoria* porque el valor observado no puede predecirse antes de la realización del experimento, aunque sus posibles valores sí son conocidos de antemano.

En general se representará a las variables aleatorias (en adelante abreviadas v.a.) con letras mayúsculas: X, Y, Z, etc. y sus valores con letras minúsculas, es decir, x, y, z, etc.

Ejemplos:

1. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral correspondiente al experimento que consiste en el lanzamiento de un dado. Es posible definir sobre Ω la v.a. X tal que:

   $$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{si w es par} \\ 1 & \text{si w es impar} \end{cases} \quad \text{, es decir, } x = 0 \text{ ó } x = 1.$$

   Por lo tanto: $X(1) = 1$, $X(3) = 1$, $X(5) = 1$ y $X(2) = 0$, $X(4) = 0$, $X(6) = 0$.

2. Sea Ω el espacio muestral correspondiente al experimento que consiste en extraer una bolilla de una urna que contiene tres blancas y dos rojas, anotar su color y devolverla a la urna, repitiendo este proceso hasta obtener una bolilla roja. Luego $\Omega = \{(r),(b,r),(b,b,r),(b,b,b,r),...\}$.
   Sea X la v.a. definida como: X = "nº de extracciones necesarias hasta observar una bolilla roja".

   Por lo tanto: X (r) = 1, X (b,r) = 2, X (b,b,r) = 3, X (b,b,b,r) = 4, ...

3. Se registró el tiempo transcurrido desde que se intenta la conexión a un servidor hasta que se concreta la misma. Sea X la v.a. definida como: X = "tiempo requerido para la conexión".
   Por lo tanto: Los valores de la v.a. están dados por el siguiente conjunto: $\{x: x \in (0,\infty)\}$ ó $\{x: x \in (0,M)\}$ si existe un tiempo de corte automático de intento de conexión M (time out).

En los ejemplos 1. y 2. las v.a. toman un número finito e infinito numerable de valores, respectivamente, mientras que en el ejemplo 3. la v.a. X toma valores en un conjunto infinito no numerable.
Se define **rango** de una v.a. X al conjunto de valores posibles de la v.a. X. Se denota R_X.

$$R_X = \{x \in \Re : \text{existe un } \omega \in \Omega \text{ ; } X(\omega) = x\}$$

En lo ejemplos anteriores el rango resulta:

1. $R_X = \{0,1\}$.
2. $R_X = \{1, 2, 3, ...\}$.

3. $R_X = (0, \infty)$ ó $R_X = (0, M)$.

Las v.a. pueden clasificarse en **discretas** y **continuas**, en función del conjunto de sus valores posibles.

Definición:
Una v.a. se dice **discreta** si toma un número finito o infinito numerable de valores.

Ejemplo:
1. X = "número de estudiantes casados, de los 55 estudiantes que asisten a un curso de posgrado en Teledetección".
2. Y = "número de llamadas que recibe un conmutador en un intervalo de 5 minutos".
3. Z = "número de artículos que no cumplen con los estándares de calidad en una muestra de 4". La muestra se extrae al azar de un lote que contiene 25 artículos, 5 de los cuales que no cumplen con los estándares de calidad.
4. V = "número de artículos a extraer hasta hallar el primero que no cumple con los estándares de calidad". Los artículos se extraen de un lote que contiene 25 artículos, 5 de los cuales que no cumplen con los estándares de calidad.
5. W = "número de accidentes que ocurren semanalmente en un cruce de rutas muy transitado en cercanías de la ciudad de Bahía Blanca".

Los valores de una variable aleatoria se determinan a partir de los posibles resultados de un experimento, por este motivo es posible asignar probabilidades a dichos valores.

Ejemplo:
Se arroja dos veces un dado equilibrado. El espacio muestral asociado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) ,\\ &(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,\\ &(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) ,\\ &(4,1) , (4,2) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) ,\\ &(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) ,\\ &(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) \} = \{w = (w_1, w_2): w_i \in \{1,2,3,4,5,6\}, i = 1,2\}\end{aligned}$$

Se define la variable aleatoria Y = "suma de los resultados obtenidos en los dos lanzamientos". Su rango es $R_Y = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. ¿Cómo se calcularía la probabilidad de que la v.a. Y tome el valor 4, suponiendo que los lanzamientos son independientes?

$P(Y = 4) = P(\{(w_1, w_2) \in \Omega / Y((w_1, w_2)) = 4\}) = P(\{(1,3) , (2,2) , (3,1)\}) = 3/36 = 1/12.$

Definición:
La **función de probabilidad puntual o de masa** de la v.a. discreta X, se define para todo x como

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{w \in \Omega / X(w) = x\})$$

Ejemplo:
Para el ejemplo anterior se define la v.a. X = "número de caras pares obtenidas en los dos lanzamientos". $R_X = \{0,1, 2\}$. La función de probabilidad puntual de la v.a. X es:

$P(X = 0) = P(\{(w_1, w_2) \in \Omega / X((w_1, w_2)) = 0\}) = P(\{(w_1, w_2) / w_i \in \{1, 3, 5\}, i = 1,2\}) = 9/36 = 0.25.$

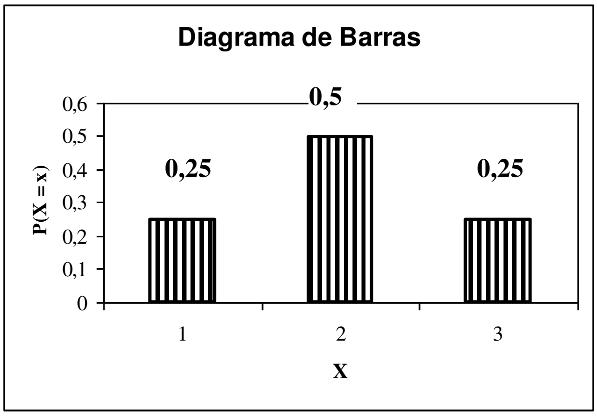
$P(X = 1) = P(\{(w_1, w_2) \in \Omega \,/\, X((w_1, w_2)) = 1\}) = P(\{(w_1, w_2) \,/\, w_1$ es impar y w_2 es par ó w_1 es par y w_2 es impar$\}) = 18/36 = 0.5$.

$P(X = 2) = P(\{(w_1, w_2) \in \Omega \,/\, X((w_1, w_2)) = 2\}) = P(\{(w_1, w_2) \,/\, w_i \in \{2, 4, 6\}, i = 1,2\}) = 9/36 = 0.25$.

Se puede resumir esta información en una tabla de la forma:

X	0	1	2
P(X = x)	9 /36	18 /36	9 /36

o mediante un gráfico en el cual, para cada valor de x se construye una barra centrada en x cuya altura es proporcional a P(X = x).



La tabla, gráfico o fórmula que indica **la probabilidad P(X = x) asociada a cada posible valor de X** se conoce como **distribución de probabilidad** para la v.a. discreta X.

La distribución de probabilidad de una v.a. discreta debe satisfacer dos propiedades:

(1) Dado que P(X = x) es una probabilidad debe asumir un valor $0 \leq P(X = x) \leq 1$ para todo $x \in R_X$.
(2) La suma de los valores P(X = x) para todos los valores de X debe ser igual a 1, es decir, $\sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1$.

Obsérvese que dado que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ donde los E_i son eventos simples, y $P(\Omega) = \sum_{E_i \subset \Omega} P(E_i) = 1$ por el axioma de probabilidad A2), la sumatoria de P(X = x) para todos los valores posibles de X es igual a 1 porque equivale a la sumatoria de las probabilidades de todos los eventos simples de Ω.

En el ejemplo anterior se verifica que: P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1

La función de probabilidad puntual de una v.a. X indica como se distribuye la probabilidad total "1" entre los distintos valores de X, y se determina a partir de la probabilidad de los sucesos asociados a cada valor de X.

Ejemplo:
Considérese un circuito impreso con 15 conexiones soldadas. Del total, 5 conexiones soldadas no cumplen con los estándares de calidad. Si se eligen 3 conexiones al azar, y se define la variable aleatoria X = "número de conexiones que **no cumplen** con los estándares de calidad en la muestra

de 3", hallar el rango de la v.a. X, sus probabilidades asociadas y resumir esta información en una tabla de distribución de probabilidad.

Para poder determinar el rango de X y sus respectivas probabilidades es conveniente hallar el espacio muestral Ω asociado al experimento.

Sea el evento C = {conexión soldada que cumple con los estándares de calidad} y por lo tanto, $\overline{C}$ = {conexión soldada que no cumple con los estándares de calidad}.

Entonces:

$\Omega = \{(C, C, C), (\overline{C}, C, C), (C, \overline{C}, C), (C, C, \overline{C}), (\overline{C}, \overline{C}, C), (\overline{C}, C, \overline{C}), (C, \overline{C}, \overline{C}), (\overline{C}, \overline{C}, \overline{C})\}$

El rango de X está dado por el conjunto: $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Las probabilidades asociadas a cada uno de los valores del rango se calculan de la siguiente manera:

$$P(X = 0) = P((C, C, C)) = \frac{10}{15}\frac{9}{14}\frac{8}{13} = \frac{720}{2730} = 0.264$$

$$P(X = 1) = P((\overline{C}, C, C) \cup (C, \overline{C}, C) \cup (C, C, \overline{C})) = P((\overline{C}, C, C)) + P((C, \overline{C}, C)) + P((C, C, \overline{C})) =$$
$$= 3 * P((\overline{C}, C, C)) = 3*\frac{5}{15}\frac{10}{14}\frac{9}{13} = 3*\frac{450}{2730} = \frac{1350}{2730} = 0.494$$

$$P(X = 2) = P((\overline{C}, \overline{C}, C) \cup (\overline{C}, C, \overline{C}) \cup (C, \overline{C}, \overline{C})) = P((\overline{C}, \overline{C}, C)) + P((\overline{C}, C, \overline{C})) + P((C, \overline{C}, \overline{C}))$$
$$= 3 * P((\overline{C}, \overline{C}, C) = 3*\frac{5}{15}\frac{4}{14}\frac{10}{13} = 3*\frac{200}{2730} = \frac{600}{2730} = 0.220$$

$$P(X = 3) = P((\overline{C}, \overline{C}, \overline{C})) = \frac{5}{15}\frac{4}{14}\frac{3}{13} = \frac{60}{2730} = 0.022$$

Por lo tanto la distribución de probabilidad de la v.a. X está dada por:

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.264	0.494	0.220	0.022

Se verifica que: P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.264 + 0.494 + 0.220 + 0.022 = 1

Definición:

La **función de distribución acumulada (f.d.a.)** de una v.a. discreta X, con función de probabilidad puntual $p_X(x)$ se define para todo $x \in \Re$, como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{y \leq x,\\ y \in R_X}} P(X = y), \quad x \in \Re$$

Es decir, $F_X(x)$ es la probabilidad de que la v.a. X tome valores menores o iguales que x.

Ejemplo:

Para el ejemplo de la v.a. X = "número de caras pares obtenidas en los dos lanzamientos" definida en el experimento en el cual se arroja dos veces un dado equilibrado, la función de distribución acumulada de la v.a. X está dada por:

Si $x < 0$ $F_X(x) = P(X \leq x)= 0$

Si $x = 0$ $F_X(0) = P(X \leq 0) = 0.25$

Si $0 < x < 1$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = 0.25$

Si $x = 1$ $F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.25 + 0.5 = 0.75$

Si $1 < x < 2$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.75$

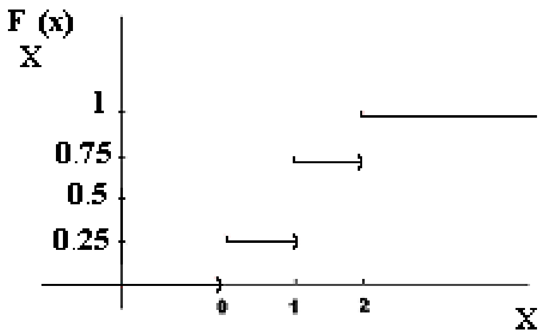
Si $x = 2$ $F_X(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1$

Si $x > 2$ $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.25 + 0.5 + 0.25 = 1$

Resumiendo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.25 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



Obsérvese que se trata de una función escalera, no decreciente que toma valores entre 0 y 1.

Propiedades de la función de distribución acumulada:

(1) $\forall$ x $\in \Re$, $F_X(x) \in [0,1]$.
(2) $F_X(x)$ es monótona no decreciente, es decir, si $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
(3) $F_X(x)$ es continua a derecha, es decir, $\lim_{h\to 0+} F_X(x+h) = F_X(x)$.
(4) $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Si se considera nuevamente el ejemplo del lanzamiento de dos dados, donde se definió a la v.a. X como "número de caras pares obtenidos en los dos lanzamientos", a partir de la función de distribución acumulada es posible calcular, por ejemplo:

$$P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - 0.25 = 0.75.$$

Esperanza o valor esperado de una variable aleatoria discreta

Para el período académico en curso, una importante universidad privada de la ciudad de Buenos Aires tiene un registro de 15000 estudiantes.
Sea X = "número de cursos en los cuales está registrado un estudiante seleccionado al azar". A continuación figura la distribución de probabilidad de la v.a. X:

X	1	2	3	4	5	6	7
P(X = x)	0.01	0.03	0.13	0.25	0.39	0.17	0.02

Como P(X = 1) = 0.01 entonces (0.01) * 15000 = 150, es decir 150 estudiantes están inscriptos para un curso. Del mismo modo es posible calcular el número de alumnos inscriptos para los restantes valores de la variable X: 450, 1950, 3750, 5850, 2550 y 300.
Para calcular el número promedio de cursos por estudiante, o el valor promedio de X en la población, es necesario calcular el número total de cursos y dividirlo por el número total de estudiantes, es decir:

$$\frac{1*150+2*450+3*1950+4*3750+5*5850+6*2550+7*300}{15000}=\frac{68550}{15000}=4.57$$

Esta expresión también puede escribirse:

$$1*\frac{150}{15000}+2*\frac{450}{15000}+3*\frac{1950}{15000}+4*\frac{3750}{15000}+5*\frac{5850}{15000}+6*\frac{2550}{15000}+7*\frac{300}{15000}=\frac{68550}{15000}=4.57$$

Como 150/15000 = 0.01 = P(X = 1), 450/15000 = 0.03 = P(X = 2) y así sucesivamente, entonces el cálculo anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$1*P(X=1)+2*P(X=2)+3*P(X=3)+4*P(X=4)+5*P(X=5)+6*P(X=6)+7*P(X=7)$$

Esta expresión muestra que para calcular el valor promedio de X en la población, sólo es necesario conocer los valores posibles de X y sus respectivas probabilidades. En particular, no se requiere disponer del tamaño de la población mientras que se conozca la distribución de probabilidad de X. El valor promedio, o media de X es entonces un promedio ponderado de los posibles valores 1,2, ..., 7, donde los pesos o factores de ponderación son las probabilidades de esos valores.

Definición:
Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X y función de probabilidad puntual $p_X(x)$, la **esperanza o valor esperado de X** se define como:

$$E(X)=\mu_X=\sum_{x\in R_X} x\, p_X(x)$$

siempre que $\sum_{x\in R_X} |x|\, p_X(x)<\infty$. Si la serie de los valores absolutos diverge, la esperanza no puede definirse y se dice que no existe.

Ejemplo:

Se lanza un dado y se define la v. a. X = "número obtenido en la cara superior". La distribución de probabilidad de X es:

x	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Entonces, $$E(X) = 0*\frac{1}{6} + 1*\frac{1}{6} + 2*\frac{1}{6} + 3*\frac{1}{6} + 4*\frac{1}{6} + 5*\frac{1}{6} + 6*\frac{1}{6} = 3.5$$

Interpretación de la esperanza: E(X) es el centro de gravedad de la función de probabilidad puntual. Es decir, que si sobre cada valor posible de X, x_i, se coloca una masa $p_X(x_i)$, el punto de equilibrio del sistema es E(X). En este sentido, se puede decir que E(X) es una medida del "centro" de la distribución.

Otra interpretación de E(X) está relacionada con un resultado que se estudiará más adelante, denominado "ley de los grandes números". Supóngase que se repite indefinidamente un experimento aleatorio y que en cada repetición la v.a. X considerada toma diferentes valores; se ha demostrado que el promedio de los resultados obtenidos tiende a estabilizarse en un número que es E(X), si es que ésta existe.

Ejemplo:
Para el ejemplo referido a un circuito impreso con 15 conexiones soldadas, la esperanza de la v.a. X = "número de conexiones que **no cumplen** con los estándares de calidad en la muestra de 3" con distribución de probabilidad,

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.264	0.494	0.220	0.022

está dada por:

$$E(X) = 0*0.264 + 1*0.494 + 2*0.220 + 3*0.022 = 1.$$

Por lo tanto, de cada 3 conexiones soldadas, se espera que 1 **no cumpla** con los estándares de calidad.

Esperanza o valor esperado de una función de una variable aleatoria discreta

Ejemplo:
Sea la v.a. X = "número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar", con función de probabilidad puntual:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.100	0.075

Supóngase que el costo del servicio (en pesos), Y, es función del número de paquetes contratados, según la siguiente fórmula: $Y = 30\,(X+1)$. ¿Cuál es el valor esperado del costo pagado por cliente, es decir, E(Y)?
A partir de la función de probabilidad puntual de X, es posible obtener la función de probabilidad puntual de Y. Reemplazando cada valor de la v.a. X en la función Y, se obtiene el rango de Y. Por ejemplo, si X = 1, entonces Y = $30\,(1+1) = 60$, y así sucesivamente.
Luego, R_Y = {60,90,120,150,180}. Para calcular las probabilidades asociadas a los valores del rango de Y, se procede de la siguiente manera:

$P(Y = 60) = P(X = 1) = 0.375$, $P(Y = 90) = P(X = 2) = 0.275$, $P(Y = 120) = P(X = 3) = 0.175$,

$P(Y = 150) = P(X = 4) = 0.100$ y $P(Y = 180) = P(X = 5) = 0.075$.

Entonces,

Y	60	90	120	150	180
P(Y = y)	0.375	0.275	0.175	0.100	0.075

Luego el valor esperado de la v.a. Y es:

$E(Y) = 60*0.375 + 90*0.275 + 120*0.175 + 150*0.100 + 180*0.075 = 96.75$. El costo promedio pagado por cliente es de 96.75$.

Obsérvese que: $$E(Y) = \mu_Y = \sum_{x=1}^{5} h(x)\ p_X(x), \text{ siendo } h(x) = 30\,(x+1).$$

Proposición:
Si X es una v.a. discreta y toma valores x_1, x_2, ..., entonces h(X) es una v.a. discreta con valores y_1, y_2, ..., siendo $y_j = h(x_i)$ para al menos un valor de *i*.

Proposición:
Si la v.a. X tiene función de probabilidad puntual puntual $p_X(x)$ para todo $x \in R_X$, entonces la esperanza de cualquier función real h(X), está dada por,

$$E(h(X)) = \mu_{h(X)} = \sum_{x \in R_X} h(x)\ p_X(x)$$

si la serie es absolutamente convergente, es decir, si $\sum_{x \in R_X} |h(x)|\ p_X(x) < \infty$.

Propiedades de la esperanza:
(1) Sea X v.a. tal que $P(X = c) = 1 \Rightarrow E(X) = c$
(2) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = X + k \Rightarrow E(Y) = E(X) + k$
(3) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = kX \Rightarrow E(Y) = k\,E(X)$
(4) Sea X una v.a. y sean $h_1(X), h_2(X), ..., h_k(X)$ funciones de X entonces
$E(h_1(X) + h_2(X) + ...+ h_k(X)) = E(h_1(X)) + E(h_2(X)) + ... +E(h_k(X))$.

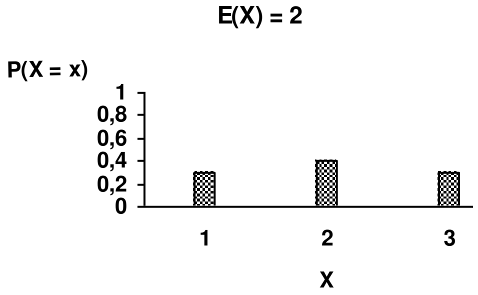
Varianza de una variable aleatoria discreta

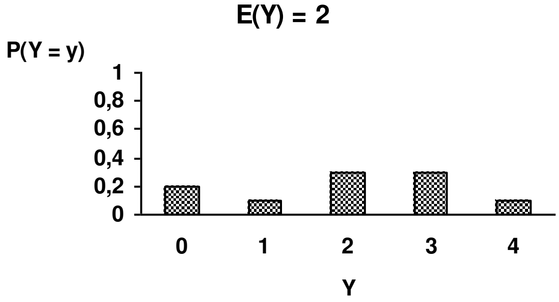
La esperanza de una v.a. X determina el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, pero no proporciona información acerca de la forma de la distribución. Las siguientes tablas y gráficos presentan tres distribuciones discretas de probabilidad que poseen el mismo valor esperado, sin embargo, difieren notablemente en la dispersión de sus valores:

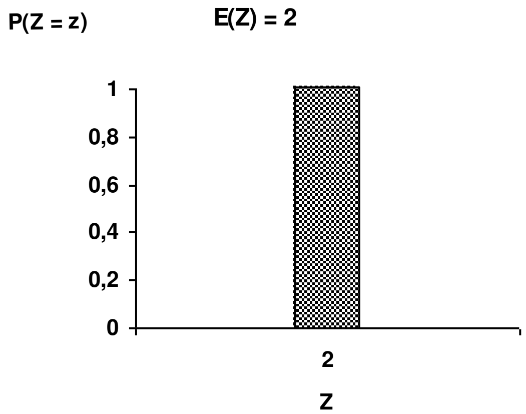
X	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.4	0.3

Y	0	1	2	3	4
P(Y = y)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Z	2
P(Z = z)	1







La medida más usada de variabilidad de una v.a. es la varianza. Es una medida de dispersión de los valores de una variable aleatoria alrededor de su esperanza.

Definición:
Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad puntual $p_X(x)$ y esperanza μ_X, la **varianza de X**, que se denotará V(X), σ_X^2 ó σ^2 , es

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \; p_X(x) = E\left[\,(X - \mu_X)^2\right] = E\left[\,(X - E(X))^2\right]$$

Se prueba desarrollando el cuadrado y aplicando propiedades de la esperanza, que

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

El **desvío estándar de X**, es $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$, es decir, es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Su ventaja sobre la varianza es que tiene las mismas unidades que la correspondiente variable aleatoria.

Ejemplo:
Hallar la varianza y el desvío estándar de las tres v.a. presentadas anteriormente con esperanza igual a 2. Para ello se utilizará la expresión

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (1^2 * 0.3 + 2^2 * 0.4 + 3^2 * 0.3) - 2^2 = 4.6 - 4 = 0.6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 5.6 - 4 = 1.6$$

$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 4 - 4 = 0.$

Los valores que presentan una mayor variabilidad son los correspondientes a la variable Y.

Ejemplo:
Para el ejemplo referido a un circuito impreso con 15 conexiones soldadas, la varianza de la v.a. X = "número de conexiones que **no cumplen** con los estándares de calidad en la muestra de 3" con distribución de probabilidad,

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.264	0.494	0.220	0.022

y valor esperado 1, está dada por:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (0^2 * 0.264 + 1^2 * 0.494 + 2^2 * 0.220 + 3^2 * 0.022) - 1^2 =$$
$$= 1.572 - 1 = 0.572.$$

Propiedades de la varianza:

(1) Sea X v.a. tal que P(X = c) = 1 $\Rightarrow$ V(X) = 0.
(2) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = X + k $\Rightarrow$ V(Y) = V(X).
(3) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = kX $\Rightarrow$ V(Y) = k^2 V(X).

Ejemplo:
Sea la v.a. X = "número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar", con distribución de probabilidad:

x	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.100	0.075

y varianza $V(X) = (1^2 * 0.375 + 2^2 * 0.275 + 3^2 * 0.175 + 4^2 * 0.100 + 5^2 * 0.075) - (2.225)^2 =$
= 6.525 – 4.950 = 1.575.

Se definió anteriormente el costo del servicio (en pesos), Y, como función del número de paquetes contratados, $Y = 30(X+1)$. La varianza de la v.a. Y, V(Y), puede calcularse aplicando las propiedades recientemente enumeradas.

Por la propiedad (3) de varianza resulta:

$$V(Y) = 30^2 * V((X+1)) = 900 * V((X+1))$$

y por la propiedad (2):

$$V(Y) = 900 * V((X+1)) = 900 * V(X) = 900 * 1.575 = 1417.5\ \$^2.$$

Por lo tanto, el desvío estándar resulta: $\sqrt{V(Y)} = \sqrt{1417.5} = 37.649\$.$

____________________ Fin Capítulo II ____________________