

SEGUNDO PARCIAL DE ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y DE GEOMETRÍA -TEMA II (19/05/17)

APELLIDO Y NOMBRE	[REDACTED]	NOTA:	A
CARRERA:	[REDACTED]	LU:	[REDACTED]

1. B (a) Si $gr[f(x)] = 4$ y $gr[g(x)] = 3$, calcular $gr[f(x) \cdot g(x) - 5 \cdot (g(x))^2 + 10x^8]$.

(b) Hallar todas las raíces del polinomio $18x^6 + 12x^5 + 47x^4 + 30x^3 - 103x^2 - 72x - 12$, sabiendo que $x + 2i$ es uno de sus factores. Indicar el orden de multiplicidad de cada raíz hallada.

2. Resolver, clasificar y escribir el respectivo conjunto solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 4d + 5e = 0 \\ 3a + c - 2d + 4e = -5 \\ -5a + 3b - c - d - 9e = 5 \end{cases}$$

3. a) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Probar que:

(i) Si $a \mid b+c$ y $2a \mid 2c$, entonces $a \mid 5b$.

(ii) $(a^2 + a)(a - 1)$ es divisible por 6.

b) Hallar:

(i) ¿Cuál es el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que su producto por $2^7 \cdot 3 \cdot 5^6$ es un entero cubo perfecto?

(ii) Hallar el máximo común divisor entre los enteros a y b sabiendo que $2a + 26b = 10$ y que b es un número impar tal que $(b, 5) = 1$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Hallar, si es posible, la matriz inversa de A .

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X + 2 \cdot A \cdot B = B$.

Indicar el número de hojas entregadas sin incluir el enunciado: 3.

Firmar la última hoja.

NOTA: Las respuestas que no cuenten con la debida justificación no se calificarán.

1 a) $g[f(x)] = 4$; $g[g(x)] = 3$

$$g \left[\underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{\text{grado} = 7} - \underbrace{5(g(x))^2}_{\text{grado} = 6} + \underbrace{10x^8}_{\text{grado} = 8} \right] = 8 \quad \checkmark$$

Máximo grado = 8 S/justificar

2) $18x^6 + 12x^5 + 47x^4 + 30x^3 - 103x^2 - 72x - 12$

	18	12	47	30	-103	-72	-12
-2i		-36i	-42-24i	-48+50i	100+36i	72+6i	12
	18	12-36i	-25-24i	-18+50i	-3+36i	6i	0
2i		36i	24i	-50i	-36i	-6i	
	18	12	-25	-18	-3	0	

Como $(x+2i)$ es un factor, una raíz es $-2i$. ✓

También es su conjugado $-2i = 2i$ como raíz. ¿Por qué?

$$(18x^4 + 12x^3 - 25x^2 - 18x - 3)(x+2i)(x-2i)$$

$$d(-3) = \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$d(18) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

$$\text{Posibles raíces} = \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{18}, \pm 3, \pm \frac{3}{2} \right\}$$

	18	12	-25	-18	-3
-1/3		-6	-2	9	3
	18	6	-27	-9	0
-1/3		-6	0	9	
	18	0	-27	0	

$$(18x^2 - 27)(x+1/3)^2(x+2i)(x-2i)$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{-4 \cdot 18 \cdot -27}}{2 \cdot 18} = \frac{\pm \sqrt{6}/2}{1} \quad \checkmark$$

$$(x + \sqrt{6}/2)(x - \sqrt{6}/2)(x + 1/3)^2(x+2i)(x-2i)$$

Raíz	Orden de multiplicidad
-2i	1
2i	1
-1/3	2
$\sqrt{6}/2$	1
$-\sqrt{6}/2$	1

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2a - 3b + 4d + 5e = 0 \\ 3a + c - 2d + 4e = -5 \\ -5a + 3b - c - d - 9e = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 4 & -5 \\ -5 & 3 & -1 & -1 & -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-3/2)F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ (5/2)F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9/2 & 1 & -8 & -1/2 & -5 \\ 0 & 9/2 & -1 & 9 & 7/2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9/2 & 1 & -8 & -1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - 3b + 4d + 5e = 0 \\ 9/2b + c - 8d - 1/2e = -5 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$9/2b + c - 8d - 1/2e = -5$$

$$9/2b = -5 + 1/2e - c$$

$$b = \frac{-5 + 1/2e - c}{9/2}$$

$$b = -\frac{2}{9}c + \frac{7}{9}e - \frac{10}{9}$$

$$2a - 3b + 4d + 5e = 0$$

$$2a - \left(-\frac{2}{3}c + \frac{7}{3}e - \frac{10}{3}\right) + 5e = 0$$

$$2a + \frac{2}{3}c - \frac{7}{3}e + \frac{10}{3} + 5e = 0$$

$$a = -\frac{1}{3}c - \frac{4}{3}e - \frac{5}{3}$$

① Solución general:

$$\left(-\frac{1}{3}c - \frac{4}{3}e - \frac{5}{3}, -\frac{2}{9}c + \frac{7}{9}e - \frac{10}{9}, c, 0, e\right)$$

② Solución particular: (cuando $c=0$ y $e=0$)

$$\left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{9}, 0, 0, 0\right)$$

Tiene infinitas soluciones, por lo tanto es un Sist. Comp. Indeterminado (SCI).

Perfecto!

③ ④ ①

si $a|b+c$ y $2a|2c \Rightarrow a|5b$

Como $2a|2c \xRightarrow{\text{s/justificar}} a|c$

Como $a|b+c$ y $a|c \xRightarrow{\text{s/justificar}} a|b$ y $a|c$

si $a|b$ entonces $a|5b$

si $a|b$ entonces $a|5b$ ✓

No lo
Pruebas

② $6 | (a^2+a)(a-1)$

$\begin{array}{r} 6/2 \\ 3/3 \\ 1 \end{array}$

$6=2 \cdot 3$

$2 \cdot 3 | (a-1) \cdot a(a+1)$

¿por qué? $a^2+a = a(a+1)$
gol! soluble porque $(2,3)=1$!!

$a = \begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$ ✓

○ $(a-1)a(a+1)$
 $(2k-1)(2k)(2k+1)$
↓ divide a 2 ✓

$m = \begin{cases} 3k \\ 3k+1 \\ 3k+2 \end{cases}$ ✓

○ $(a-1)a(a+1)$
 $(2k+1-1)(2k+1)(2k+1+1)$
 $(2k)(2k+1)(2k+2)$
↓ divide a 2 ✓

○ $(a-1)a(a+1)$
 $(3k-1)(3k)(3k+1)$ ✓
↓ divide a 3 ✓

○ $(a-1)a(a+1)$
 $(3k+1-1)(3k+1)(3k+1+1)$
 $(3k)(3k+1)(3k+2)$ ✓
↓ divide a 3 ✓

○ $(a-1)a(a+1)$
 $(3k+2-1)(3k+2)(3k+2+1)$
 $(3k+1)(3k+2)(3k+3)$
 $(3k+1)(3k+2)(3k+1)$ ✓
↓ divide a 3 ✓

Por lo tanto, $6 | (a^2+a)(a-1)$

3) (i)

$$2^7 \cdot 3 \cdot 5^6 = x^3$$

Multiplicamos por

$$2^2 \cdot 3^2$$

Entonces queda

$$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^6 = x^3$$

$$\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^6} = x$$

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = x$$

$$600 = x$$

Verificación:

$$\sqrt[3]{(2^7 \cdot 3 \cdot 5^6)(2^2 \cdot 3^2)} = x$$

$$\sqrt[3]{(6.000.000)(36)} = x$$

$$\sqrt[3]{216.000.000} = x$$

$$600 = x \quad \checkmark$$

El número es $2^2 \cdot 3^2 = 36 \quad \checkmark$

(ii) $2a + 26b = 10$

$b = 2k + 1$
con $k \in \mathbb{Z}$

$(b, 5) = 1$

$(a, b) \mid 10$

$\Rightarrow (a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \checkmark \text{ cumple con todas las condiciones} \\ 2 & \text{No, ya que } b = 2k + 1, \text{ debe ser impar} \\ 5 & \text{No, ya que } (b, 5) = 1, b \neq 5a \\ 10 & \text{No, ya que } (b, 5) = 1, b \neq 5a \end{cases}$

$(b, 5) = 1$

$\Downarrow$

$b \neq 5a$

$a \in \mathbb{Z}$

Solución:

$(a, b) = 1$

El Máximo Común Divisor entre a y b es 1

(4) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 3 = -3$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Adj } A)^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det} \cdot (\text{Adj } A)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

④②

$$AX + 2AB = B$$

$$A \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mul. X to each 3x1

$$X = \begin{pmatrix} H \\ i \\ J \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X + \begin{pmatrix} 64 \\ 30 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -57 \\ -29 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H \\ i \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \\ -29 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H+5J \\ 3J \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57 \\ -29 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i=3$$

$$3J = -29$$

$$J = -29/3$$

$$X = \begin{pmatrix} -26/3 \\ -29/3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$H+5J = -57$$

$$H+5 \cdot (-29/3) = -57$$

$$H + \frac{145}{3} = -57$$

$$H = -\frac{26}{3}$$