Matemática Aplicada	**Nombre y apellido:** ____________________
Examen Final,	**Registro:** ____________________
31 de agosto de 2020	**N° de hojas entregadas:** ____________________

1. (a) Probar que las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x|x|$ son linealmente independientes. ¿Cuánto vale su Wronskiano?

   (b) Probar que la función y_1 es solución de la ecuación diferencial dada. Utilizar el método de reducción del orden para hallar otra función, y_2, tal que $\{y_1, y_2\}$ formen una base del espacio de soluciones.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(x) = x. \tag{1}$$

2. Hallar la solución general del siguiente sistema, Determinar el tipo y estabilidad de su punto crítico:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

   ¿Cuál es la solución que en $t = 0$ pasa por $(1, 1)$?

3. Obtener los desarrollos de Fourier de las extensiones par e impar de

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \quad 0 < x \leq \pi.$$

4. ¿Qué funciones tienen las siguientes transformadas de Laplace?

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{6}{(s+1)^3}, \\ G(s) &= \frac{5s+1}{s^2 - 25}. \end{aligned}$$

5. Resolver la ecuación de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

   con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \quad \text{para } 0 < y < 1, \\ u(1, y) &= 0, \quad \text{para } 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= \operatorname{sen} 2\pi x, \quad \text{para } 0 < x < 1, \\ u(x, 1) &= 0, \quad \text{para } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

6. Probar que $f(z) = i(1 - z^2)$ es entera (holomorfa en todo el plano complejo). ¿Cuánto vale su derivada?