APELLIDO Y NOMBRE:	NOTA:
CARRERA:	Reg.Nº:

1. *a*) Sea $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y sea R la relación definida por:

$$(a, b)R(c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \text{ divide a } c.$$

   Determinar si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

   b) Sea $f : E \to F$ una función y $X \subseteq E$ e $Y \subseteq E$. Probar que si f es inyectiva entonces $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

2. *a*) Demostrar, aplicando el principio de inducción, que vale la siguiente igualdad:

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Hallar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de modo que el polinomio $(x^2 - 3x + 3 - i)(x^2 + \alpha x + \beta)$ tenga todos sus coeficientes reales y posea como raíz al complejo $2 + i$.

3. Sea $S = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] : \ P(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

   a) Verificar que S es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

   b) Probar que $B_1 = \{1 + x, 1 - x\}$ es una base de S.

   c) Sea $T : S \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida como $T(ax + b) = (a + 2b, 3a + 4b)$. Hallar la matriz asociada a T respecto de las bases B_1 y $B_2 = \{(1, 2), (3, 4)\}$.

4. Considerar el plano $\pi : 2x - 2y + z + 2 = 0$ y la recta de ecuación paramétrica

$$L : \begin{cases} x = -\beta \\ y = 0 \\ z = 2\beta \end{cases} , \beta \in \mathbb{R}.$$

   a) Hallar la distancia, $d(L, \pi)$, entre la recta L y el plano π.

   b) Considerando el punto de la recta $Q(-2, 0, 4)$, hallar el punto P del plano π tal que $d(P, Q) = d(L, \pi)$.

   c) Hallar el punto T simétrico de Q respecto de la recta L.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & b & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Hallar, si es posible, el valor de $b \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = (7, 2, 0)$ sea un autovector de T asociado a $\lambda = 3$

Indicar el número de hojas entregadas sin incluir el enunciado:... ... Firmar la última hoja.

NOTA: Las respuestas que no cuenten con la debida justificación no se calificarán.