

1. a) Para el sistema representado por las siguientes ecuaciones de estado no lineales, adopte una de las funciones de Lyapunov propuestas que resulte adecuada y analice la estabilidad o inestabilidad para el punto de equilibrio en el origen en función del parámetro  $k$ . Justifique si es posible garantizar la globalidad de la propiedad hallada.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ -2x_2(x_1^2 - x_2^2 - k^2) \end{bmatrix} \quad V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad a_1) P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a_2) P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- b) Explique los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica según Lyapunov.

2. Un sistema representado por las ecuaciones de estado  $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 & 1 \\ -1.17 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1.1 \end{bmatrix} u(k)$ ,

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \text{ se realimenta para obtener autovalores en } 0.64 \pm j0.155. (T=0.1 \text{ s}). \text{ Para el diseño de un}$$

observador predictivo de orden completo para este sistema, se proponen dos alternativas de ganancias de realimentación

$$a) K_1 = \begin{bmatrix} 1.97 \\ -1.13 \end{bmatrix} \quad b) K_2 = \begin{bmatrix} 1.141 \\ -1.034 \end{bmatrix}$$

Justifique cuál de las dos adoptaría y escriba las ecuaciones del observador resultante.

3. El modelo discreto en variables de estado de un sistema está dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

donde la salida  $y(k)$  es la única variable medida. Se desea implementar un control por realimentación estática de estados para estabilizarlo con ganancias  $L = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Determine los polos de lazo cerrado del sistema.

(b) Verifique que el sistema a lazo abierto es observable.

(c) Diseñe un observador de estado de orden reducido y escriba las ecuaciones resultantes sistema-observador.

4. Para una planta representada por las siguientes ecuaciones de estado discretas

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Considere que se conecta a continuación, en cascada, un controlador representado por ecuaciones de estado discretas con matrices

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si  $\mathbf{r}(k)$  es la entrada de referencia y el sistema se realimenta con los estados a través de una matriz de ganancia constante conveniente,  $u(k) = -\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) \end{bmatrix}^T$ , plantee las ecuaciones de estado del sistema total y analice qué tipo de entradas puede seguir el sistema y qué tipo de perturbaciones puede rechazar.

5. a) Describa cómo elegiría los polos de los observadores de orden completo con el fin de no desmejorar los márgenes de estabilidad de acuerdo a las consideraciones de diseño propuestas por Doyle y Stein.  
 b) Para el diseño de observadores de orden reducido actualizados, comente cuándo utilizaría los casos 1 y 2 cuando el orden del sistema es 5.  
 c) En el diseño de sistemas “seguidores” donde se utiliza un compensador que incluye la dinámica adicional (tanto para el seguimiento de entradas específicas como para el rechazo de perturbaciones a la planta, comente las ventajas y desventajas más notorias que tiene este diseño en cuanto a robustez y rechazo de perturbaciones.