PRIMER PARCIAL DE ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y DE GEOMETRÍA -TEMA I (19/04/17)

APELLIDO Y NOMBRE: [redacted]	NOTA: A
CARRERA: ING EN SISTEMAS DE INF	Reg.Nº [redacted]

1. B a) Dados los números complejos $z = \dfrac{2-2i}{-1+i}$ y $w = -1 - \sqrt{3}i$ calcular:

   (i) $Re(i.z)$ (ii) $Im(z-1+i)$ (iii) $||-3.w||$ (iv) w^{16}

   B b) Hallar los números complejos que verifiquen la condición $z^4 + 2i = i^{137}$.

2. a) Dado el conjunto $T = \{x, \{y\}, z, \{t, u\}\}$, indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:
   B
   (i) $z \in T$ (ii) $\{z\} \in T$ (iii) $\{y, z\} \subseteq T$ (iv) $y \in T$
   (v) $\{y\} \in T$ (vi) $\{y\} \subseteq T$ (vii) $\{\{y\}\} \subseteq T$ (viii) $\{t, u\} \subseteq T$

   B⁻ b) Demostrar por cálculo directo que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. R+ a) Determinar si la relación $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (b,d), (c,a), (d,a)\}$ definida sobre $A = \{a, b, c, d, e\}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

   b) Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} : 2 < x \leq 9\}$ el conjunto sobre el cual se define la siguiente partición: $\{\{3, 4, 5\}, \{6, 7\}, \{8\}, \{9\}\}$.

   B (i) Hallar la relación de equivalencia R asociada a la partición dada.

   B (ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente A/R?

4. a) Dada la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x^2$, y $h \in \mathbb{Z}$:

   R (i) Hallar $f(2-h)$, $f(\{9,5\})$, $f^{-1}(\{5\})$ y $f^{-1}(\{-3, 1\})$.

   R+ (ii) Indicar si f es inyectiva, epiyectiva y/o biyectiva. Justificar la respuesta.

   b) Demostrar, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

   B
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Indicar el número de hojas entregadas sin incluir el enunciado:...4. Firmar la última hoja.

NOTA: Las respuestas que no cuenten con la debida justificación no se calificarán.

LU: [redacted] [redacted] HOJA N 1

FECHA

1 a

$$Z = \frac{2-2i}{-1+i} = \frac{2-2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-2-2i+2i+2i^2}{1^2-i^2} =$$

$$= \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$$

i $R_e(i \cdot z) = R_e(-2i) = 0$

ii $I_m(z-1+i) = I_m(-3+i) = 1$

iii $\|-3 \cdot w\| = \|3+3\sqrt{3}\,i\| = \sqrt{3^2+(3\cdot\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = 6$

iV $w^{16} = (-1-\sqrt{3}\,i)^{16} = (2_{4/3\pi})^{16} = 2^{16}_{\frac{64}{3}\pi} = 2^{16}_{\frac{4}{3}\pi}$

$W = -1-\sqrt{3}\,i = 2_{4/3\pi}$

$\|W\| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

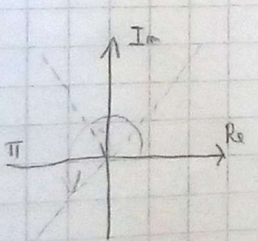
C.A.:

$\frac{64}{3}\pi - 20\pi = \frac{4}{3}\pi$

$a = P \cdot \cos(\theta)$

$-1 = 2 \cdot \cos(\theta)$

$\frac{2}{3}\pi = \theta$



$$\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

$$\frac{1}{3}\pi + \pi = \boxed{\frac{4}{3}}\pi$$

① b)

$$z^4 + 2i = i^{117}$$

$$z^4 + 2i = i$$

$$z^4 = -i$$

$$z = \sqrt[4]{-i}$$

$$z = \sqrt[4]{1_{3/2\pi}}$$

$$z = \sqrt[4]{1}_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2.k.\pi}{4}} \quad , \quad 0 \leq k < 4 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

- $z_1 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2.0.\pi}{4}} = 1_{\frac{3}{8}\pi} = 1_{\frac{3}{8}\pi}$
- $z_2 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2.1.\pi}{4}} = 1_{\frac{7}{8}\pi} = 1_{\frac{7}{8}\pi}$
- $z_3 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2.2.\pi}{4}} = 1_{\frac{11}{8}\pi} = 1_{\frac{11}{8}\pi}$
- $z_4 = \sqrt[4]{1}_{\frac{\frac{3}{2}\pi + 2.3.\pi}{4}} = 1_{\frac{15}{8}\pi} = 1_{\frac{15}{8}\pi}$

$\rightarrow$ 4 SOLUCIONES

Lu [redacted] HOJA N° 2

FECHA

2

a) $T = \{ x, \{y\}, z, \{t, u\} \}$

i) V ✓, ya que z es un elemento de T.

ii) F ✓, ya que $\{z\}$ no es un elemento de T

iii) F ✓, ya que $\{y, z\}$ no está contenido en T

iv) F ✓, ya que y no es un elemento de T

v) V ✓, ya que $\{y\}$ es un subconjunto de T.

vi) F ✓, ya que $\{y\}$ es un elemento de T

vii) V ✓, ya que $\{\{y\}\}$ está contenido en T

viii) F ✓, ya que $\{t, u\} \in T$

② b

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$= A \cap (B \cap C)'$

$= A \cap (B' \cup C')$

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$

$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ✓

[redacted]

HOJA N° 3

FECHA

③ ⓐ

$A = \{ a, b, c, d, e \}$

$R = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (b,d), (c,a), (d,a) \}$

- Es Reflexiva, ya que todo elemento de A está en relación consigo mismo.
  Es reflexiva,
- No es Simétrica, ya que el par (d, b) no está en la relación.
  No es simétrica
  (además tampoco está el par (a, d))
- No es transitiva, ya que no está el par (b, a) en la relación.
  No es transitiva

¿Antisimétrica?

ⓑ $A = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

ⓘ $R = \{ (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4), (6,6), (7,7), (6,7), (7,6), (8,8), (9,9) \}$

ⓘⓘ $C_3 = \{ 3, 4, 5 \} = C_4 = C_5$

$C_6 = C_7 = \{ 6, 7 \}$

$C_8 = \{ 8 \}$

$C_9 = \{ 9 \}$

$A \setminus R = \{ \{ 3, 4, 5 \}, \{ 6, 7 \}, \{ 8 \}, \{ 9 \} \}$

El conjunto cociente tiene 4 elementos.

LU [redacted] HOJA N° 4

[redacted] FECHA:

(4) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad h \in \mathbb{Z}$

$f(x) = x^2$

(i) $f(2-h) = (2-h)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-h) + (-h)^2 = 4 - 4h + h^2$

$= 4 - 4h + h^2$

$f(\{9, 5\}) = \{25, 81\} = \{25, 81\}$

$f^{-1}(\{5\}) =$ No está definida.

No está definida

$f^{-1}(\{-3, 1\}) =$ No está definida

No está definida

(ii) No es inyectiva, ya que $f(2) = f(-2) = 4$

No es sobreyectiva, ya que $\mathrm{Im}\, f \neq B$

$\mathrm{Im}\, f = [0, +\infty) \in \mathbb{Z}$

$B \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, no es biyectiva. (con que no se cumpla una de las dos ya alcanza para afirmar que no es biyectiva)

4) b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}$

⊙ Caso base: $n=1$

$2-\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^1} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Vale para $n=1$ ✓

⊙ Supongamos que vale para todo $K \in \mathbb{N}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^K} = 2-\frac{1}{2^K}$

qvq vale para $K+1$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^K}+\frac{1}{2^{K+1}} = 2-\frac{1}{2^K}+\frac{1}{2^{K+1}}$

$= 2-\frac{1}{2^K}+\frac{1}{2.2^K}$

$= 2-\frac{1.2+1}{2.2^K}$

$= 2+\frac{(-2+1)}{2^{K+1}}$

$= 2-\frac{1}{2^{K+1}}$

Por lo tanto, vale para todo $n \in \mathbb{N}$

4 HOJAS + ENUNCIADO [redacted]