Primer examen parcia[redacted] Análisis I 27/04/2018
Apellido y nombres[redacted] Nº de Hojas: 4 Tema 1
Carrera[redacted] Nota:[redacted]

Ejercicio 1

I) Resuelva los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+5x+1}}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

(c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{e^{\frac{-1}{x-3}}-9}{3}$

(d) $\lim_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{3x+7}-5}{x-6}$

II) Halle todas las asintotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{|-2x+4|}{x-2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-6x-27}{x^2-4x-45}$

Ejercicio 2

Sea $f(x) = |\ln(x)+2|$.

(a) Determine el dominio, la imagen de $f(x)$ y su intersección con los ejes.

(b) Determine si la función es par o impar.

(c) Halle la función inversa. Si es necesario defina $f^*(x)$ cuyo dominio sea una restricción del dominio de $f(x)$ y hallar $f^{*^{-1}}(x)$. Grafique la función hallada y $f^*(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesiano.

Ejercicio 3

Dada la función trigonométrica $f(x) = |2\cos(x+\pi)-2|$, grafique $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$. ¿Cúantos períodos graficó de la función? Halle todos los puntos en el intervalo donde la función se anula.

Ejercicio 4

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3-1} & \text{si } x < -1, \\ -e^{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 5. \\ \dfrac{|x+3|}{x-10} & \text{si } x > 5 \end{cases}$

Halle y clasifique todas las discontinuidades en $\mathbb{R}$. En caso de encontrar discontinuidades evitables, redefina la función para que sea contínua en esos puntos.

1 I

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{16x^2+5x+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(16+5/x+1/x^2)}}{x(1+1/x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{16+5/x+1/x^2}}{x(1+1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{16+5/x+1/x^2}}{x(1+1/x)} = -\frac{\sqrt{16}}{1} = \boxed{-4}$$

B

b) $$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

C.A.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

B

c) $$\lim_{x\to3} \frac{e^{\frac{-1}{x-3}}-9}{3} = \boxed{\text{No existe}}$$ porque los límites laterales son distintos

B

$$\lim_{x\to3^+} \frac{e^{\frac{-1}{x-3}}-9}{3} = -\frac{9}{3} = \boxed{-3} \qquad \lim_{x\to3^-} \frac{e^{\frac{-1}{x-3}}-9}{3} = \boxed{+\infty}$$

d) $$\lim_{x\to6} \frac{\sqrt{3x+7}-5}{x-6} = \lim_{x\to6} \frac{\sqrt{3x+7}-5}{x-6}\cdot\frac{\sqrt{3x+7}+5}{\sqrt{3x+7}+5} =$$

B

$$= \lim_{x\to6} \frac{3x+7-5^2}{(x-6)(\sqrt{3x+7}+5)} = \lim_{x\to6} \frac{3x-18}{(x-6)(\sqrt{3x+7}+5)} = \lim_{x\to6} \frac{3\cancel{(x-6)}}{\cancel{(x-6)}(\sqrt{3x+7}+5)} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

1 II

C.A.
$-2x+4 \geq 0$
$-2x \geq -4$
$x \leq 2$

a) $f(x) = \dfrac{|-2x+4|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{-2x+4}{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ -\left(\dfrac{-2x+4}{x-2}\right) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \boxed{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \boxed{-2}$

B

Hay asíntota horizontal en 2 y -2
No hay asíntota vertical

b) $f(x) = \dfrac{x^2-6x-27}{x^2-4x-45} = \dfrac{(x-9)(x+3)}{(x-9)(x+5)}$

C.A.

$\dfrac{6 \pm \sqrt{36-4.(-27)}}{2.1} = \dfrac{6 \pm 12}{2} = \begin{matrix} 9 \\ -3 \end{matrix}$

$\dfrac{4 \pm \sqrt{16-4.(-45)}}{2.1} = \dfrac{4 \pm 14}{2} = \begin{matrix} 9 \\ -5 \end{matrix}$

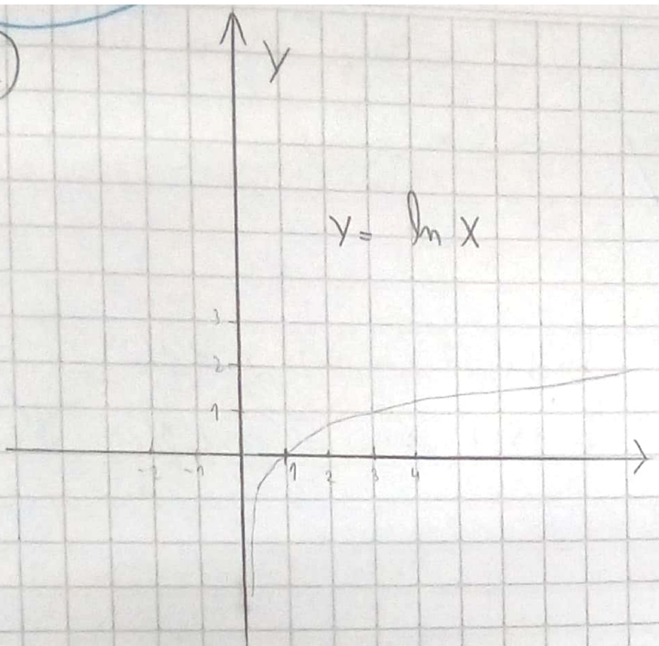
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-6x-27}{x^2-4x-45} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(1-\underbrace{6/x}_{0}-\underbrace{27/x^2}_{0})}{\cancel{x^2}(1-\underbrace{4/x}_{0}-\underbrace{45/x^2}_{0})} = \boxed{1}$

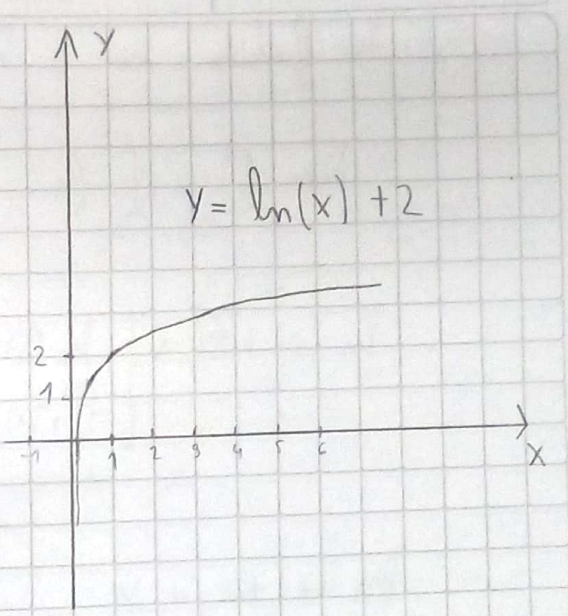
$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-6x-27}{x^2-4x-45} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(1-\underbrace{6/x}_{0}-\underbrace{27/x^2}_{0})}{\cancel{x^2}(1-\underbrace{4/x}_{0}-\underbrace{45/x^2}_{0})} = \boxed{1}$

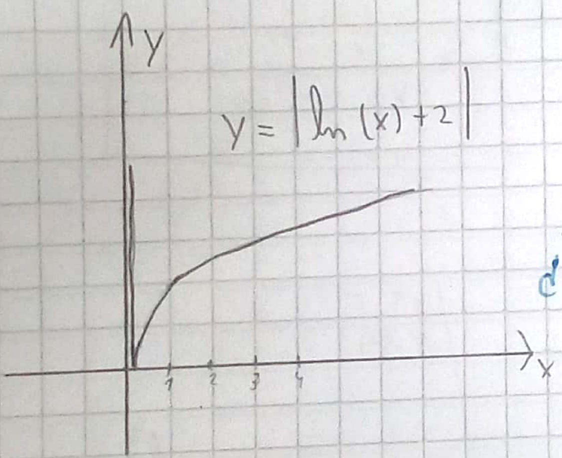
Hay una asíntota horizontal en 1
Hay una asíntota vertical en -5

B

2







a) Dom f : $(0, +\infty)$

Im f : $[0, +\infty)$

¿cómo sabes? → $\cap$ eje Y : no existe

$\cap$ eje X : $\ln(x) + 2 = 0$

$\ln(x) = -2$

$x = e^{-2}$

$\frac{1}{e^2}$

b) No es par ya que, por ejemplo:

$f(e) = |\ln(e) + 2| = |1+2| = 3$

$f(-e) = |\ln(-e) + 2| =$ No existe

Como $f(x) \neq f(-x)$, no es par.

Tampoco es impar, ya que:

$-f(-e) = -|\ln(-e) + 2| =$ No existe

Como $f(x) \neq -f(-x)$, no es impar.

(c) Como para distintos valores de X le corresponde el mismo Y, la función no es inyectiva. Por lo tanto, debemos restringir el dominio

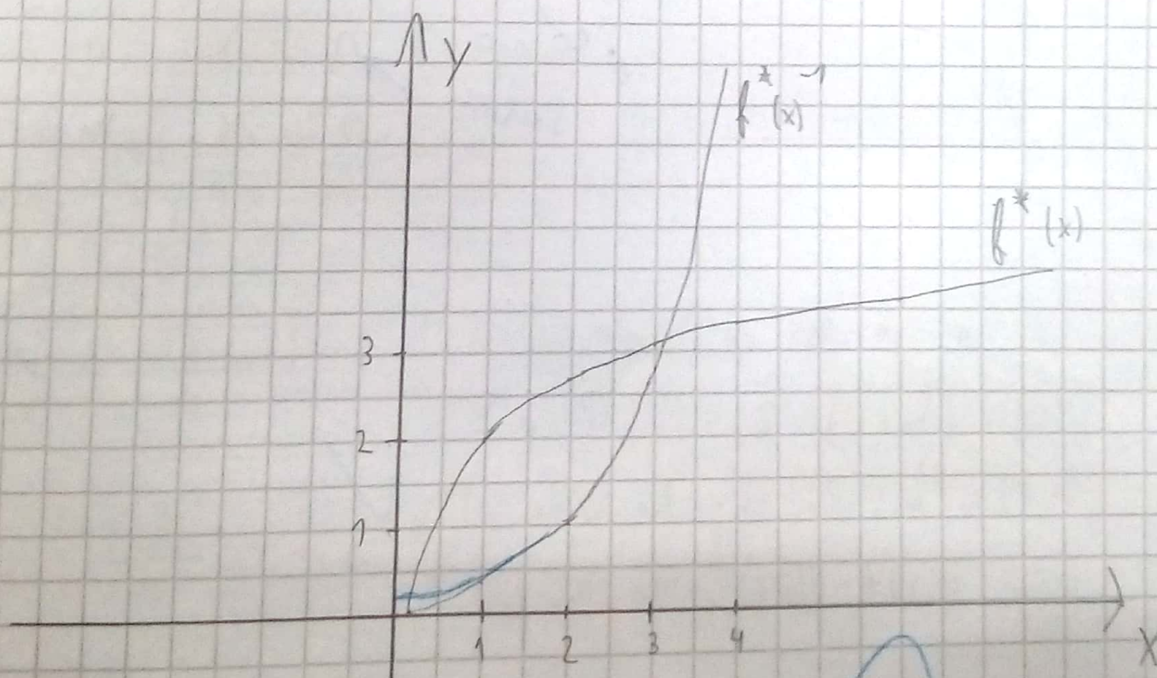
$$\mathrm{Dom}\, f^* : \left[\frac{1}{e^2}, +\infty \right)$$

$$|\ln(x)+2| = \begin{cases} \ln(x)+2 & \text{si } \ln(x)+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/e^2 \\ -(\ln(x)+2) & \text{si } \ln(x)+2 \geq 0 \Rightarrow x < 1/e^2 \end{cases}$$

$$\ln(x)+2 = y$$

$$\ln x = y-2$$

$$x = e^{y-2} \Longrightarrow \boxed{f^*(x)^{-1} = e^{x-2}}$$



B

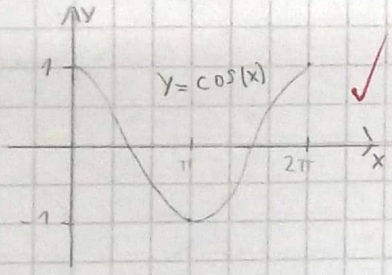
③ $f(x) = |2\cos(x+\pi) - 2|$

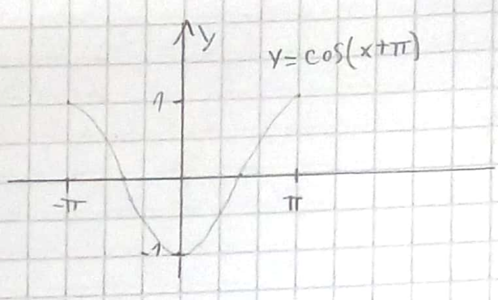
⊙ $x + \pi = 0$

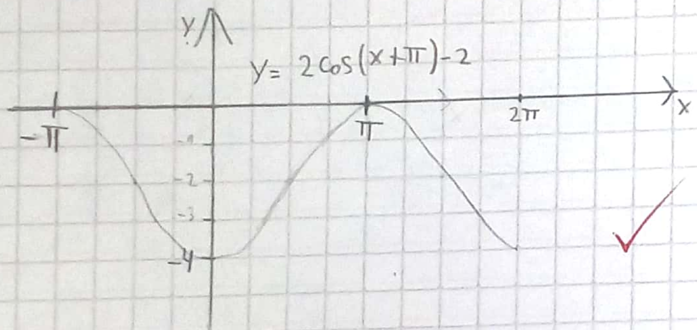
$x = -\pi$

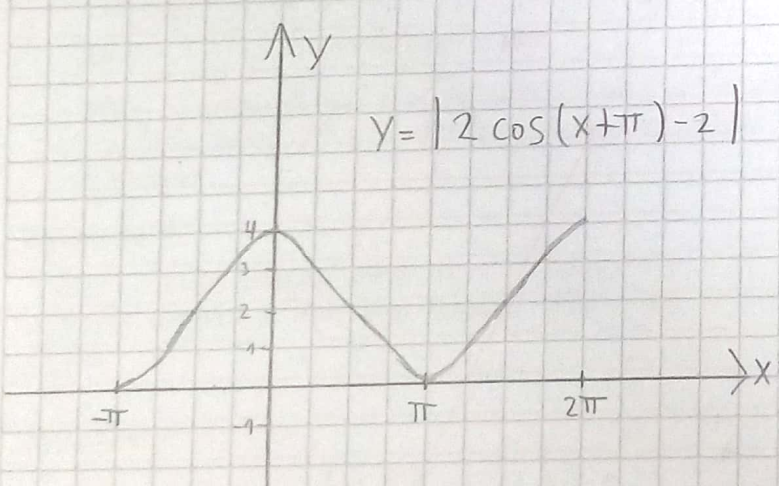
⊙ $x + \pi = 2\pi$

$x = \pi$









Se graficó 1 período completo y medio más

3π

La función se anula $-\pi$ y π

Obs: En general, se anula en $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

MUY ¡BIEN!

④

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3-1} & \text{si } x < -1 \\ -e^{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 5 \\ \dfrac{|x+3|}{x-10} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Conclusión?

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{2}{-2} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to -1^+} -e^{x+1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to 5^-} -e^{x+1} = \boxed{-e^6}$$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{|x+3|}{x-10} = \lim_{x \to 5^+} \frac{x+3}{x-10} = \boxed{-\frac{8}{5}}$$

C.A.

$$\frac{|x+3|}{x-10} = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-10} & \text{si } x \geq -3 \\ -\left(\dfrac{x+3}{x-10}\right) & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

Redefinición?

Límites laterales distintos

Existe una discontinuidad no evitable en $x = 5$

$$\lim_{x \to 10^-} \frac{|x+3|}{x-10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{x+3}{x-10} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 10^+} \frac{|x+3|}{x-10} = \lim_{x \to 10^-} \frac{x+3}{x-10} = +\infty$$

Existe otra discontinuidad no evitable en $x = 10$