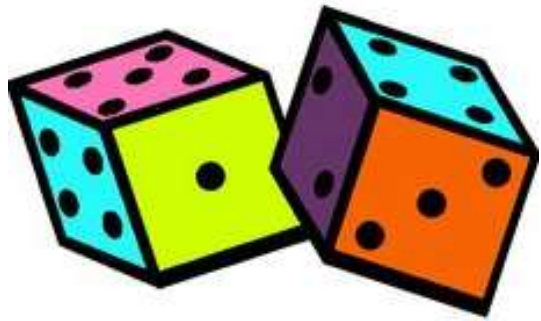


# Unidad I

## Probabilidad



### Parte II



**Mg. Silvina Pistonesi**

# Probabilidad condicional

## Ejemplo 3

Una empresa de tecnología informática ha puesto a disposición de sus empleados (sin costo) amplias instalaciones de un club deportivo que pueden usarse antes del trabajo, durante la hora del almuerzo, después del trabajo y durante los fines de semana. Los registros del último año ofrecen la siguiente información que se resume en la tabla:

Uso de las instalaciones			
Sexo	SI (S)	NO (N)	Total
Hombre (H)	65	105	170
Mujer (M)	45	35	80
Total	110	140	250

Se selecciona **un empleado** al azar, ¿Cuál es la **probabilidad estimada** de que:

**a)** use las instalaciones del club en algún momento?

$$P(S) \cong 110 / 250 = 0.44$$

**b)** use las instalaciones del club, **si se sabe** que es una empleada de sexo femenino?

$$45 / 80 = 0.5625$$

# Probabilidad condicional

Se desea averiguar la probabilidad de que ocurra el evento **A** sabiendo que se ha presentado el evento **B**.

## Definición

Sean **A** y **B** eventos tales que  $P(B) > 0$ , la probabilidad del evento **A** condicional a la ocurrencia del evento **B** es

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Se lee:** “la probabilidad de que ocurra el evento **A** dado que (si se sabe que ) ocurrió el evento **B**”.

**Nos permite distinguir si hay cambios en la probabilidad de un suceso por estar bajo distintas condiciones.**

Luego,

Uso de las instalaciones del club			
Sexo	SI (S)	NO (N)	Total
Hombre (H)	65	105	170
Mujer (M)	45	35	80
Total	110	140	250

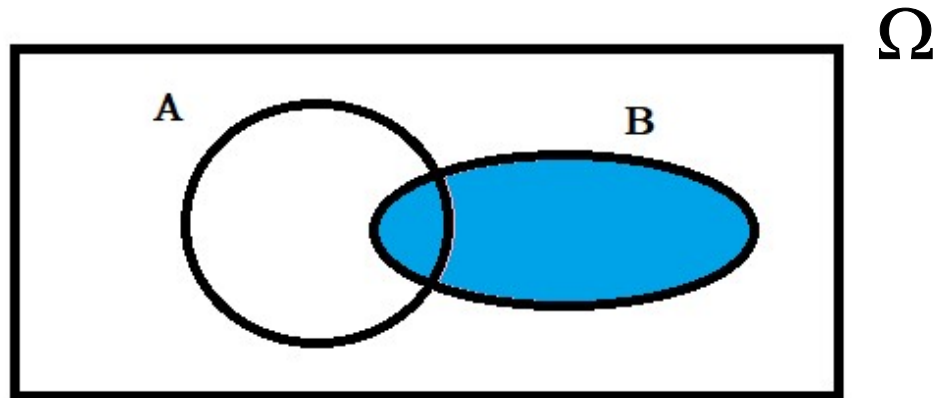
Si se selecciona **un empleado** al azar,  
¿cuál es la probabilidad estimada que use las instalaciones del club en algún momento, **si se sabe que** es una empleada de sexo femenino?

Por definición

$$P(S/M) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} \cong \frac{45/250}{80/250} = 45 / 80 = 0.5625$$

De las empleadas mujeres, el **56.25%** usa las instalaciones del club en algún momento.

## Diferencia entre $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$



$$P(A \cap B) = \frac{\text{Area of } A \cap B}{\text{Area of } \Omega}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{Area of } A \cap B}{\text{Area of } B}$$

# Probabilidad condicional

Ojo!!

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Estas probabilidades condicionales anteriores dan resultado diferente, salvo que  
 $P(A) = P(B).$

## Complemento de una Probabilidad condicional

Sean A y B eventos tales que  $P(A) > 0$

$$P(\bar{B} / A) = 1 - P(B / A)$$



## Ejemplo 4:

Se realizó una encuesta a **500** economistas seleccionados al azar, que trabajan en universidades, en industrias privadas, y en el gobierno, respecto a sus opiniones sobre si la economía en el futuro próximo va a estar **estable**, **podría expandirse** o **podría entrar en un período de contracción**. La información se resume en la siguiente tabla:

<div>Economía Economistas</div>	Estable (S)	Expansión (E)	Contracción (C)	TOTAL
Universidad (U)	125	100	100	325
Industria Privada (I)	50	35	25	110
Gobierno (G)	25	40	0	65
TOTAL	200	175	125	500

<b>Economía Economistas</b>	<b>Estable (S)</b>	<b>Expansión (E)</b>	<b>Contracción (C)</b>	<b>TOTAL</b>
<b>Universidad (U)</b>	125	100	100	325
<b>Industria Privada (I)</b>	50	35	25	110
<b>Gobierno (G)</b>	25	40	0	65
<b>TOTAL</b>	200	175	125	500

Si se selecciona un economista al azar,

- 1) ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en una industria privada, si se sabe que su pronóstico fue de expansión en la economía?

$$P(I / E) = \frac{P(I \cap E)}{P(E)} \cong \frac{35/500}{175/500} = 35/175 = 0.2$$

De los economistas que pronosticaron expansión, el **20%** trabaja en la industria privada.

- 2) si sabemos que trabaja en la universidad, ¿Es más probable que pronostique una economía estable que si trabaja con el gobierno?

<b>Economía Economistas</b>	<b>Estable (S)</b>	<b>Expansión (E)</b>	<b>Contracción (C)</b>	<b>TOTAL</b>
<b>Universidad (U)</b>	125	100	100	325
<b>Industria Privada (I)</b>	50	35	25	110
<b>Gobierno (G)</b>	25	40	0	65
<b>TOTAL</b>	200	175	125	500

**Si se selecciona un economista al azar,**

**3) Si el economista trabaja en el gobierno, ¿cuál de los tres pronósticos es más probable que haga?**

## Ejemplo 5:

Entre los empleados de una empresa de software determinada, el 70% domina el lenguaje C#, el 60% maneja Python y el 50% domina ambos lenguajes de programación.



a) Si alguien maneja Python, ¿cuál es la probabilidad de que él /ella domine el lenguaje C# también?

Se definen los eventos:

$C$  = «el empleado domina el lenguaje C#»

$Y$  = «el empleado domina el lenguaje Python»

Datos:

$P(C) = 0.70$ ,

$P(Y) = 0.60$  y

$P(C \cap Y) = 0.50$

$$P(C / Y) = \frac{P(C \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.50}{0.60} = 0.8333$$

De los empleados que dominan el lenguaje Python, aprox el **83%**, maneja C#.

b) De los programadores que dominan C#, ¿Qué porcentaje no maneja Python?

# Regla de la multiplicación

Dados dos sucesos  $A$  y  $B$ , tales que  $P(B) > 0$ ,

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B)$$

Si además,  $P(A) > 0$ ,

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

# Regla de la multiplicación

## Ejemplo 8

El sistema de cómputos de una universidad puede caerse ante diversos problemas. El **88%** de las veces que presenta un problema de alimentación, el sistema se cae. Los ingenieros de mantenimiento determinaron que la probabilidad de que el sistema presente problemas de alimentación es de **0.40**.

**¿Cuál es la probabilidad de que se caiga el sistema y experimente un problema de alimentación?**



¿Cuál es la probabilidad de que se caiga el sistema y experimente un problema de alimentación?

Se definen los eventos:

**C** = «se cae el sistema»

**A** = «el sistema presenta un problema de alimentación»

Datos:  $P(A) = 0.40$

El 88% **de las veces** que presenta un problema de alimentación, el sistema se cae.

y

$P(C/A) = 0.88$

$P(C \cap A) = ?$

Probabilidad de que el sistema presente problemas de alimentación es de **0.40**

Regla de la  
multiplicación



$$P(C \cap A) = P(C) P(A/C)$$

$$P(C \cap A) = P(A) P(C/A)$$

$P(C \cap A) =$

$$P(A) P(C/A) = 0.4 \cdot 0.88 = 0.352$$

## Regla de la multiplicación: Según el ejemplo anterior,

<b>Economía Economistas</b>	<b>Estable (S)</b>	<b>Expansión (E)</b>	<b>Contracción (C)</b>	<b>TOTAL</b>
<b>Universidad (U)</b>	125	100	100	325
<b>Industria Privada (I)</b>	50	35	25	110
<b>Gobierno (G)</b>	25	40	0	65
<b>TOTAL</b>	200	175	125	500

Si se seleccionan **2 economistas** al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que ambos pronostiquen estabilidad en la economía en el futuro?

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) P(S_2/S_1) = \frac{200}{500} \frac{199}{499} = 0.16$$

b) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno trabaje en una industria privada?

$$P(I \cap \bar{I}) \cup (\bar{I} \cap I) \cup (I \cap I) = 2P(I_1) P(\bar{I}_2/I_1) + P(I_1) P(I_2/I_1) = 2 \frac{110}{500} \frac{390}{499} + \frac{110}{500} \frac{109}{499} =$$

$$= 0.34 + 0.05 = 0.39$$

# Regla de la multiplicación

Dados los sucesos  $A_1, \dots, A_n$ ,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si  $n = 3$ , dados los sucesos  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ ,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

# Ejercicio

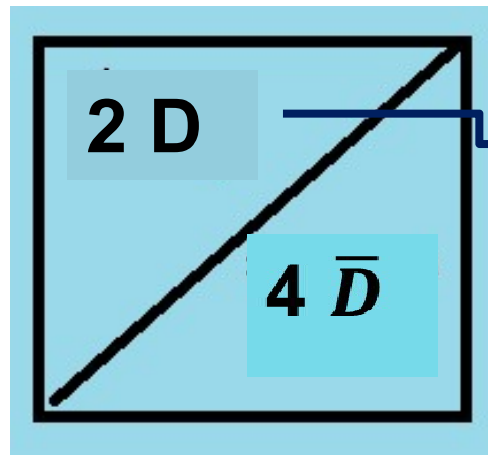
**Dos de seis** computadoras de un laboratorio tienen problemas con los discos duros. Si se eligen **tres** computadoras al azar para su inspección.

¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas tenga problemas de disco duro?



¿Cuál es la probabilidad de que **ninguna** de ellas **tenga** problemas de disco duro?

**N = 6 computadoras**



**Se definen los eventos:**

$D$  = «computadora con el disco esta dañado»

$\bar{D}$  = «computadora sin el disco dañado»

**n = 3**

**Sin reposición**

$\Omega = \{(D, D, \bar{D}), (D, \bar{D}, D), (\bar{D}, D, D), (\bar{D}, \bar{D}, D), (D, \bar{D}, \bar{D}), (\bar{D}, D, \bar{D}), (\bar{D}, \bar{D}, \bar{D})\}$ . **Finito.**

**Regla de la multiplicación**

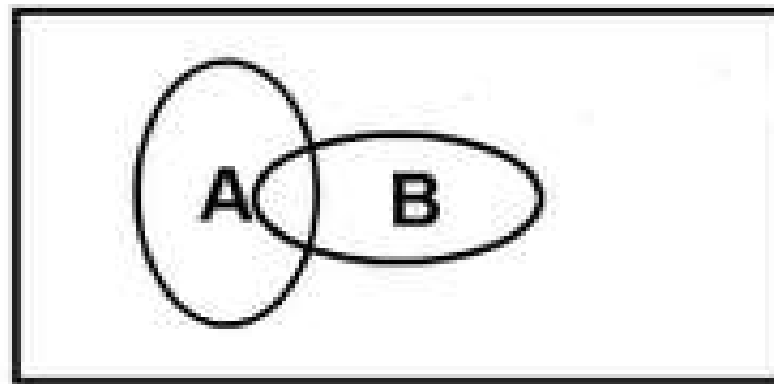


$$P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) = P(\bar{D}_1) P(\bar{D}_2 / \bar{D}_1) P(\bar{D}_3 / \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2)$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{24}{120} = 0.2$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$   
 $= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)$

# Resumen gráfico



$$P(A) = \frac{\text{blue oval}}{\text{blue rectangle}}$$

$$P(B) = \frac{\text{blue oval}}{\text{blue rectangle}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue oval}}$$

$$P(B|A) = \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue oval}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue rectangle}}$$

$$P(A) \times P(B|A) = \frac{\text{blue oval}}{\text{blue rectangle}} \times \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue oval}} = \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue rectangle}} = P(A \cap B)$$

$$P(B) \times P(A|B) = \frac{\text{blue oval}}{\text{blue rectangle}} \times \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue oval}} = \frac{\text{small blue oval}}{\text{blue rectangle}} = P(A \cap B)$$

# Eventos independientes

Dos eventos A y B cualesquiera de un espacio muestral  $\Omega$  se dicen **estadísticamente independientes** si la información acerca de la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro, es decir,

## Definición

Dos eventos A y B cualesquiera de un espacio muestral  $\Omega$  se dicen **estadísticamente independientes** si

1) ambos eventos tienen probabilidad positiva y

$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

o

2) Si al menos uno de los eventos tiene probabilidad nula.

En caso contrario, se dicen eventos **estadísticamente dependientes**.

# Ejemplos

1. En un estudio sobre rendimiento y hábitos de estudio, en Probabilidad y Estadística, se ha registrado la siguiente información: el **80%** de los alumnos aprueba la asignatura. El **25%** de los alumnos estudia en forma sistemática, mientras que el **15%** de los alumnos estudian en forma sistemática y aprueban la asignatura.

¿Son **independientes** los eventos **A** =“el alumno aprueba la asignatura” y **S** =“el alumno estudia en forma sistemática”?

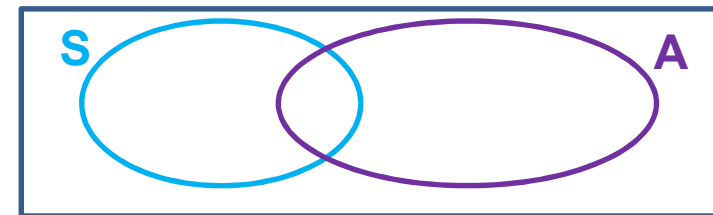
**Datos:**      $P(A) = 0.80$       $P(S) = 0.25$       $P(A \cap S) = 0.15$

Como **ambas** probabilidades son **distintas de cero**, chequeamos si

$P(A/S)$  es igual a  $P(A)$ ????

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{0.15}{0.25} = 0.6 \neq P(A) = 0.8$$



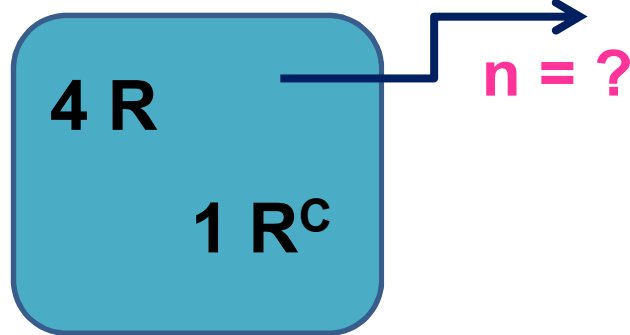
Al ser estas probabilidades diferentes, la aprobación de la materia depende de si estudia en forma sistemática el alumno. <sup>20</sup>

2. Un buzón contiene 4 cartas con remitente y 1 no lo tiene. Se realizan las extracciones necesarias hasta obtener la carta sin remitente.

¿Cuál es la probabilidad de obtener la carta sin remitente en la 2º extracción? Considerar el experimento **con reposición** y **sin reposición** y analizar si hay o no **independencia** entre los eventos

**Sin reposición**

**N = 5 cartas**



$\Omega = \{R^c, (R, R^c), (R, R, R^c), (R, R, R, R^c), (R, R, R, R, R^c)\}$ . **Finito.**

**Definimos los eventos:**

$R$  = “la primera carta escogida tiene remitente” y,

$R^c$  = “la segunda carta escogida **no** tiene remitente”

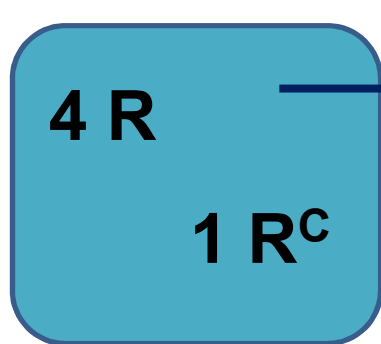
$$P((R, R^c)) = P((R \cap R^c)) = P(R_1) P(R^c_2 / R_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{20} = 0.2$$

Los eventos  $R$  = “la primera carta escogida tiene remitente” y  $R^c$  = “la segunda carta escogida no tiene remitente” **no son independientes.**

2. Un buzón contiene 4 cartas con remitente y 1 no lo tiene. Se realizan las extracciones necesarias hasta obtener la carta sin remitente.  
**¿Cuál es la probabilidad de obtener la carta sin remitente en la 2º extracción?** Considerar el experimento **con reposición** y **sin reposición** y analizar si hay o no **independencia** entre los eventos

**N = 5 cartas**

**Con reposición**



$\Omega = \{R^c, (R, R^c), (R, R, R^c), (R, R, R, R^c), (R, R, R, R, R^c), \dots\}$  **Infinito contable.**

**Definimos los eventos:**

$R =$  “la primera carta escogida tiene remitente” y,

$R^c =$  “la segunda carta escogida **no** tiene remitente”

$$P((R, R^c)) = P((R \cap R^c)) =$$

$$P(R_1) P(R_2^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25} = 0.16$$

Los eventos  $R =$  “la primera carta escogida tiene remitente” y  $R^c =$  “la segunda carta escogida no tiene remitente” **son independientes.**

# Regla de la multiplicación para eventos independientes

Si los eventos A y B son **independientes**,  $P(A) > 0$  y  $P(B) > 0$ , la probabilidad de la **intersección de A y B** es igual al **producto de las probabilidades de A y B**, en efecto,

Si  $P(B) > 0$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B)$$

y  $P(A) > 0$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$$

Si los eventos A y B son **independientes**

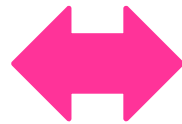
$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

# Eventos independientes

1) Si  $P(B) > 0$  y Si  $P(A) > 0$

Los eventos A y B  
son **independientes**

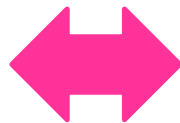


$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2)

Los eventos A y B  
son  
**independientes**



Al menos **uno** de los  
eventos tiene **probabilidad  
nula**.

## Ejemplo anterior

¿son **independientes** los eventos  $A$  = “el alumno aprueba la asignatura” y  $S$  = “el alumno estudia en forma sistemática”?

**Datos:**

$$P(A) = 0.80$$

$$P(S) = 0.25$$

$$P(A \cap S) = 0.15$$

Como **ambas** probabilidades son **distintas de cero**, chequeamos si

$$P(A \cap S) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(S)$$

$$P(A \cap S) = 0.15$$

$$P(A) \cdot P(S) = 0.80 \cdot 0.25 = 0.20$$

$\neq$

Al ser estas probabilidades diferentes, la aprobación de la materia depende de si estudia en forma sistemática el alumno.



## Ejemplo 8

Se lanzó un dado y una moneda al aire. Si se definen los eventos:

**A** = “se obtiene un 1 ó un 2 en el dado” y **B** = “se obtiene una cara en la moneda”. ¿Son **independientes** los eventos **A** y **B**?

$$\Omega = \{ (1,C), (2,C), (3,C), (4,C), (5,C), (6,C), (1,S), (2,S), (3,S), (4,S), (5,S), (6,S) \}$$

$$A = \{ (1,C), (2,C), (1,S), (2,S) \}$$

$$B = \{ (1,C), (2,C), (3,C), (4,C), (5,C), (6,C) \}$$

$$A \cap B = \{ (1,C), (2,C) \}$$



$$P(A) = P((1,C) \text{ ó } (2,C) \text{ ó } (1,S) \text{ ó } (2,S)) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(1,C) \text{ ó } (2,C) \text{ ó } (3,C) \text{ ó } (4,C) \text{ ó } (5,C) \text{ ó } (6,C)) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

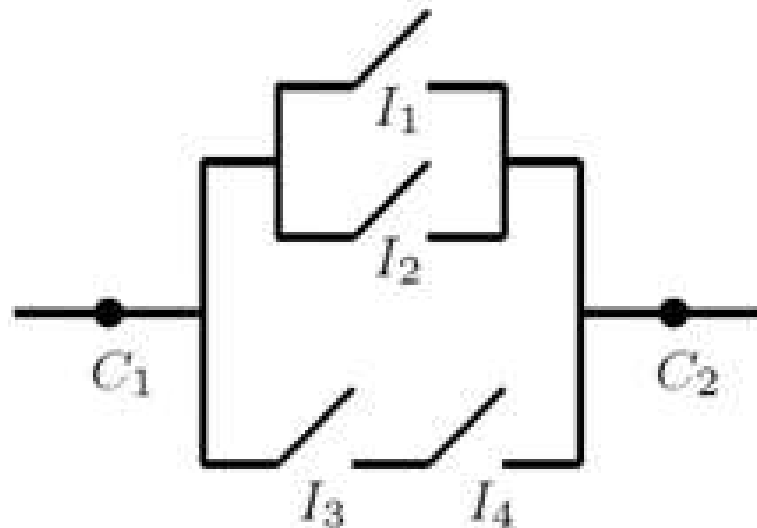
$$P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$$

Al ser estas probabilidades iguales, los eventos **A** y **B** son **independientes**.

# Ejercicios

1. Dado el siguiente circuito eléctrico en el que la probabilidad de que un interruptor  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , este cerrado es 0.5. Los estados de los interruptores son independientes entre si. Calcular la probabilidad de que llegue corriente de  $C_1$  a  $C_2$ .



## Definimos los eventos

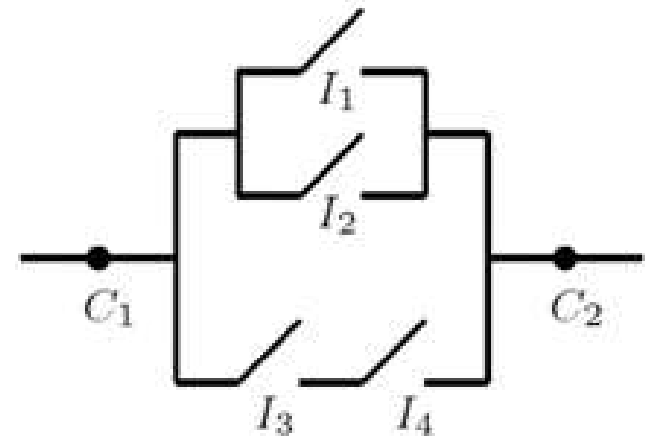
$\mathbf{A}_i = \{ \text{el interruptor } i \text{ esta cerrado} \}, \quad i = 1,2,3,4.$

Sabemos que  $P(\mathbf{A}_i) = 0.5$ , para todo  $i$ .

$\mathbf{A} = \{ \text{pasa corriente de } C_1 \text{ a } C_2 \}$

$P(\mathbf{A}) = ???$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup (\mathbf{A}_3 \cap \mathbf{A}_4)$$



Sabemos por la **propiedad 3)** que se desprende de la definición axiomática de Probabilidad

$$3) P( A_1 \cup A_2 ) = P( A_1 ) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P( A_1 \cup A_2 \cup A_3 ) = ?$$



$$P( A_1 \cup A_2 \cup A_3 ) = P( A_1 \cup (A_2 \cup A_3) )$$

$$= P( A_1 ) + P(A_2 \cup A_3) - P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3) )$$

$$= P( A_1 ) + P(A_2 ) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$$

$$= P( A_1 ) + P(A_2 ) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3))$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = ?$$



$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3))$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3))]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

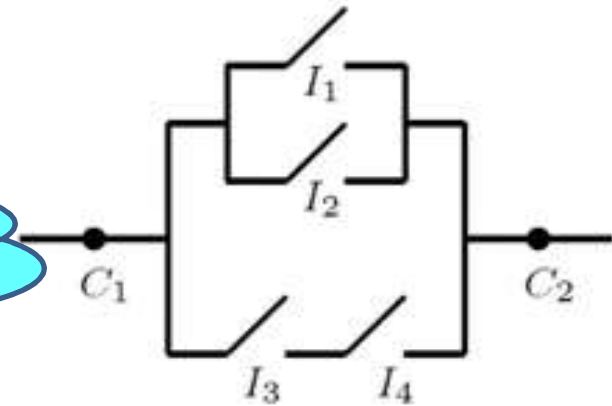


Luego,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$P(A_i) = 0.5$ , para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Los estados de los interruptores son independientes entre si.



$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup (A_3 \cap A_4)) \\
 &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3 \cap A_4) \\
 &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
 &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.5 + 0.5 + 0.5 * 0.5 - 0.5 * 0.5 - 0.5 * 0.5 * 0.5 - \\
 &\quad 0.5 * 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.5
 \end{aligned}$$

$$= 0.5 + 0.5 - 2 * 0.5 * 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.5$$

$$= 13/16 \cong 0.8125$$

# Ejercicios

2. La implementación exitosa de un nuevo sistema se basa en tres módulos independientes. Módulo1 funciona adecuadamente con una probabilidad de 0.96. Para los módulos 2 y 3, estas probabilidades son iguales a 0.95 y 0.90, respectivamente.

Calcular la probabilidad de que al menos uno de estos tres módulos no funciona correctamente.

## Ejercicios

### 3. (Fiabilidad de las copias de seguridad).

Hay un 0.01 de probabilidad de que un disco duro se bloquee. Por lo tanto, tiene dos copias de seguridad, cada una con un 0.02 de probabilidad de bloqueo, y los tres componentes son independientes entre sí. La información almacenada se pierde sólo en una situación desafortunada cuando los tres dispositivos se bloquean. ¿Cuál es la probabilidad de que se guarde la información?

4. Jugando con un dado, se gana si sale **1** ó **2** y se pierde si sale **4**, **5** ó **6**. Si sale **3**, se tira de nuevo. Calcular la probabilidad de ganar.

## Ejercicios

5. Se lanzó un dado honesto (no cargado) dos veces, obteniéndose 4 en ambas oportunidades ¿Cuál es la probabilidad de que en un tercer lanzamiento se obtenga nuevamente 4?

6. Tres componentes de un mecanismo, digamos A, B, C están colocados en serie (en línea recta). Si estos componentes se agrupan en forma aleatoria, y se definen los sucesos:

$R = \{B \text{ está a la derecha de } A\}$  y  $S = \{C \text{ está a la derecha de } A\}$  ¿Son  $R$  y  $S$  sucesos independientes? Justificar.

# Propiedades



- Si los sucesos **A** y **B** son mutuamente excluyentes,  $A \cap B = \emptyset$ , y  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , entonces **A** y **B** no son eventos independientes.
  
- Si **A** y **B** son eventos **independientes** entonces,
  - (1) **A** y  $B^c$  también lo son,
  - (2)  $A^c$  y **B** también lo son,
  - (3)  $A^c$  y  $B^c$  también lo son.

# Desarrollo de las Propiedades

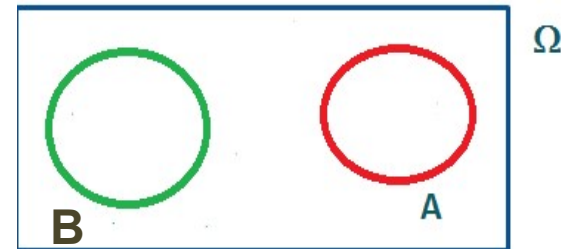
- Si los sucesos  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, entonces  $A \cap B = \emptyset$ , ¿serán  $A$  y  $B$  eventos independientes?

Supongamos  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ ,

$A$  y  $B$  son  
mutuamente  
excluyentes



$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$



## Recordemos:

$A$  y  $B$  son eventos independientes si y solo si :

- 1) Si  $P(A) > 0$  y  $P(B) > 0$ ,  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
- o, 2) Si al menos uno tiene probabilidad nula.



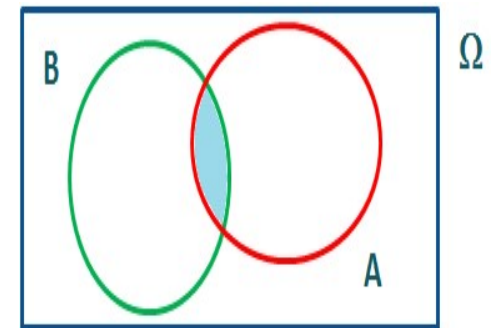
En este caso para que se verifique  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ , alguno de ellos tiene que ser cero.

Con lo cual, si  $P(A) > 0$  y  $P(B) > 0$ , y  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes, entonces son eventos dependientes.

# Desarrollo de las Propiedades

- Si los sucesos  $A$  y  $B$  no son mutuamente excluyentes, entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ , ¿serán  $A$  y  $B$  eventos independientes?

Si la  $P(A)$  y  $P(B)$  son positivas, hay que calcular la  $P(A \cap B)$  y ver si da el mismo resultado que el producto de las probabilidades. Si se verifique la igualdad los eventos serán independientes, en caso contrario, serán dependientes.



Si alguna de las probabilidades es nula, entonces son independientes.



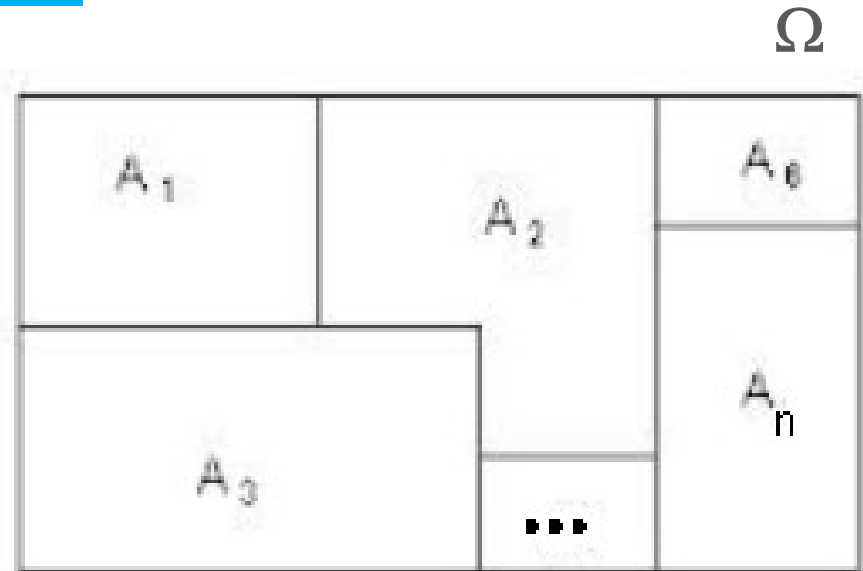
# Definición

Una colección de eventos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  constituye una **partición** del espacio muestral  $\Omega$  si

1.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ .

2.  $P(A_i) > 0$ , para todo  $i$ .

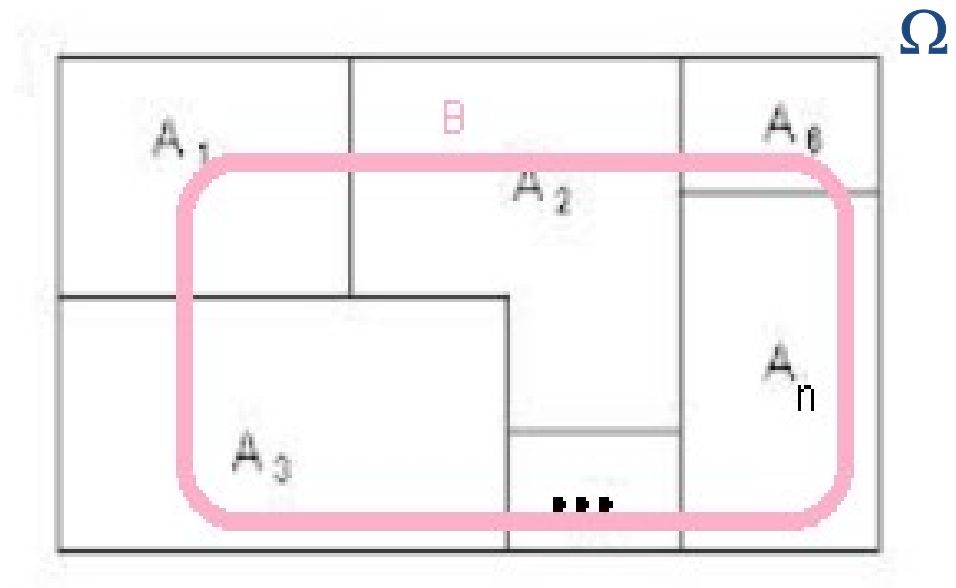
3.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ .



# Teorema de la Probabilidad Total

Sea  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  una partición del espacio muestral  $\Omega$  y sea  $B$  un suceso cualquiera tal que se conocen las probabilidades  $P(B/A_i) \forall i$ ,

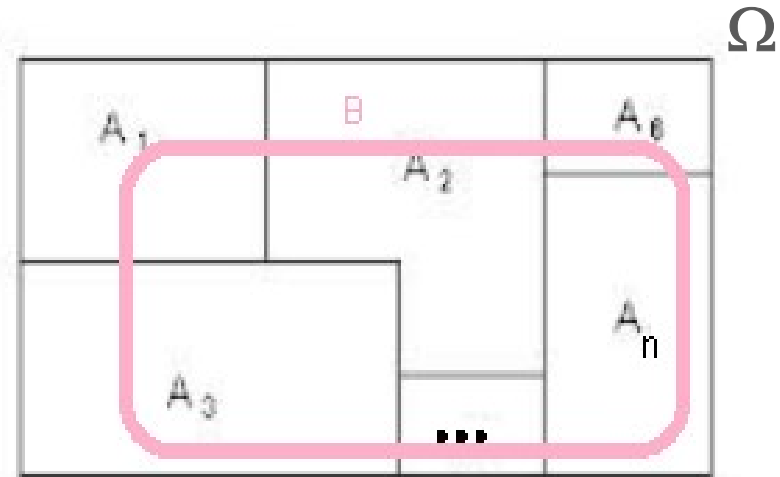
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i)$$



# Demostración del Teorema de la Probabilidad Total

Sea  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  constituye una **partición** del espacio muestral  $\Omega$  y  $B$  un evento cualquiera de  $\Omega$

$$B = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$$



$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i) \end{aligned}$$

La segunda igualdad se cumple por **propiedad 2)** de probabilidad y la tercera igualdad vale por la **ley del producto**.

# Teorema de Bayes



Sea  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  una partición del espacio muestral  $\Omega$  y sea  $B$  un suceso cualquiera tal que se conocen las probabilidades  $P(B/A_i) \forall i$ ,

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i)}.$$

## Ejemplo 9

Un canal simple de comunicación binaria transporta mensajes utilizando solo dos señales, digamos 0 y 1. Suponemos que, para un canal binario dado, el 40% del tiempo se transmite un 1. La probabilidad de que un 0 transmitido se reciba correctamente es de 0.90, y la probabilidad de que un 1 transmitido se reciba correctamente es de 0.95.

**Determinar:**

- a.** la probabilidad de que se reciba un 1 y se haya transmitido 1.
- b.** la probabilidad de que se reciba un 1.
- c.** De las veces que se recibe un 1, ¿qué porcentaje de ellas se transmitió un 0?

1. Un canal simple de comunicación binaria transporta mensajes utilizando solo dos señales, digamos **0** y **1**. Suponemos que, para un canal binario dado, el **40%** del tiempo se transmite un **1**. La probabilidad de que un 0 transmitido se reciba correctamente es de **0.90**, y la probabilidad de que un **1** transmitido se reciba correctamente es de **0.95**.

Del enunciado se extrae la siguiente información:

$T$  = “se transmite un 1”

$$P(T) = 0.40 \quad P(\bar{T}) = 0.60$$

$R$  = “se recibe un 1”.

$$P(R/T) = 0.95$$

$$P(\bar{R}/\bar{T}) = 0.90$$



Del enunciado se extrae la siguiente información:

T = “se transmite un 1”

$$P(T) = 0.40 \quad P(\bar{T}) = 0.60$$

R = “se recibe un 1”.

$$P(R/T) = 0.95 \quad P(\bar{R}/\bar{T}) = 0.90$$

a. la probabilidad de que se reciba un 1 y se haya transmitido 1.

Ley del producto

$$P(T \cap R) = P(R) P(T/R)$$

$$P(T \cap R) = P(T) P(R/T)$$

$$P(R \cap T) = P(T) P(R/T) = 0.4 \cdot 0.95 = 0.38$$



b. la probabilidad de que se reciba un 1.

$$P(R) = P(R \cap T) \cup (R \cap \bar{T}) =$$

$$= P(R \cap T) + P(R \cap \bar{T})$$

$$= P(R/T) P(T) + P(R/\bar{T}) P(\bar{T}) =$$

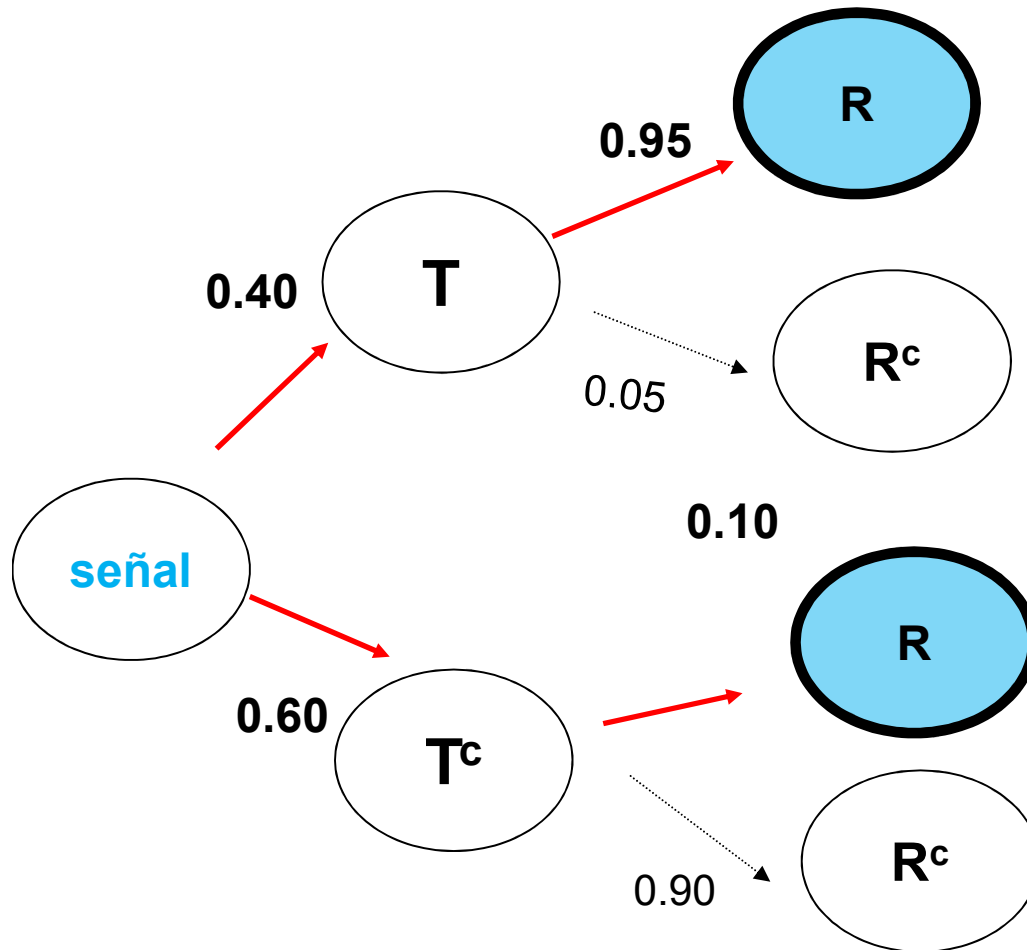
$$= 0.95 \cdot 0.4 + (1 - P(\bar{R}/\bar{T})) \cdot 0.6 = 0.44$$

Ley del producto

$$P(\bar{T} \cap R) = P(\bar{T}) P(R/\bar{T})$$

$$P(\bar{T} \cap R) = P(R) P(\bar{T}/R)$$

# Expresión del problema en forma de árbol



$$P(Q \cap T) = P(T) \times P(R/T)$$

Los caminos a través de nodos representan intersecciones.

$$P(Q^c \cap T) = P(T^c) \times P(R/T^c)$$

Las bifurcaciones representan uniones disjuntas.

$$P(R) = P(T \cap R) + P(T^c \cap R)$$

Del enunciado se extrae la siguiente información:

$T$  = “se transmite un 1”

$$P(T) = 0.40 \quad P(\bar{T}) = 0.60$$

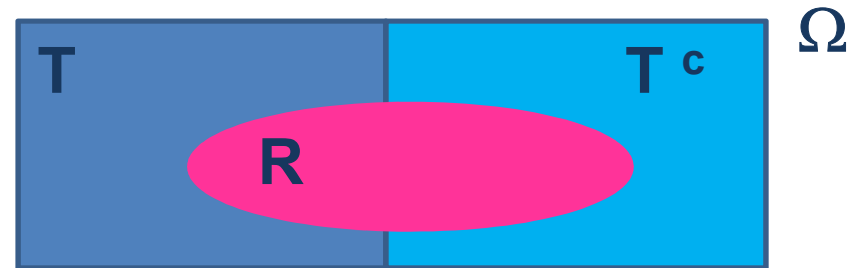
$R$  = “se recibe un 1”.

$$P(R/T) = 0.95 \quad P(\bar{R}/\bar{T}) = 0.90$$

c. De las veces que se recibe un 1, ¿qué porcentaje de ellas se transmitió un 0?

$$P(\bar{T}/R) =$$

$$\frac{P(\bar{T} \cap R)}{P(R)}$$



Ley del producto

$$= \frac{P(R/\bar{T}) P(\bar{T})}{P(R/T) P(T) + P(R/\bar{T}) P(\bar{T})}$$

$$P(\bar{T} \cap R) = P(\bar{T}) P(R/\bar{T})$$

$$P(\bar{T} \cap R) = P(R) P(\bar{T}/R)$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.6}{0.44} = \frac{0.06}{0.44} = 0.136$$

# Ejemplo 10

El departamento de personal de una empresa servicios informáticos y desarrollo de software ha descubierto que el **60%** de los candidatos entrevistados están realmente calificados (**Q**) para asumir el cargo de la compañía. Una revisión de registros muestra que de quienes están calificados, un **67%** tuvo un entrenamiento previo en estadística (**T**), mientras que el **20%** de quienes no estaban calificados habían recibido instrucción estadística con anterioridad.

- a. ¿Qué porcentaje de candidatos están calificados y están capacitados en estadística?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato tenga capacitación en análisis estadístico?
- c. Si el empleado ha tenido capacitación en estadística, ¿cuál es la probabilidad de que este calificado para el cargo?

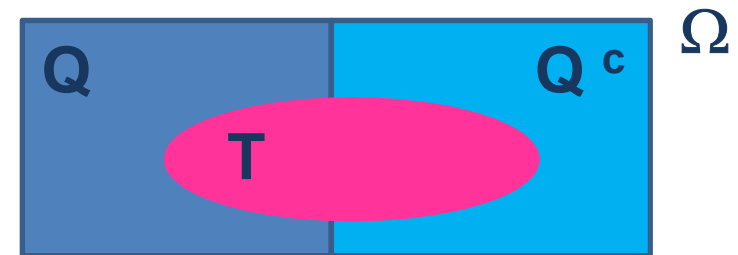
Del enunciado se extrae la siguiente información:

$Q$  = “el candidato esta calificado para el cargo”

$T$  = “el candidato esta capacitado en análisis estadístico”.

$$P(Q) = 0.60 \quad P(\bar{Q}) = 0.40$$

$$P(T/Q) = 0.67 \quad P(T/\bar{Q}) = 0.20$$



a. ¿Qué porcentaje de candidatos **están calificados** y están **capacitados en estadística**?

Ley del producto

$$P(Q \cap T) =$$

$$P(T \cap Q) = P(T) P(Q/T)$$

$$P(T \cap Q) = P(Q) P(T/Q)$$

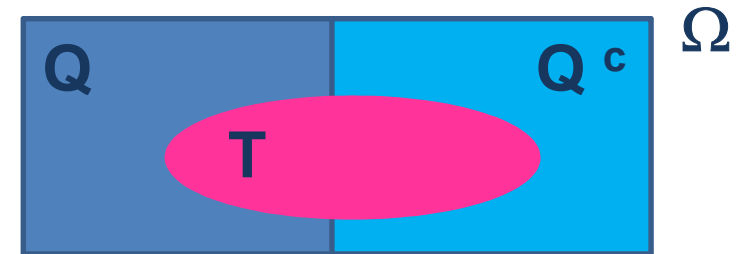
$$= P(Q) P(T/Q) = 0.60 \cdot 0.67 = 0.402$$

$Q$  = “el candidato esta calificado para el cargo”

$T$  = “el candidato esta capacitado en análisis estadístico”.

$$P(Q) = 0.60 \quad P(\bar{Q}) = 0.40$$

$$P(T/Q) = 0.67 \quad P(T/\bar{Q}) = 0.20$$



b. ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato **tenga capacitación en análisis estadístico**?

$$P(T) = ?$$

$$P(T) = P(T \cap Q) \cup (T \cap \bar{Q}) = P(T \cap Q) + P(T \cap \bar{Q})$$

$$= P(T/Q) P(Q) + P(T/\bar{Q}) P(\bar{Q})$$

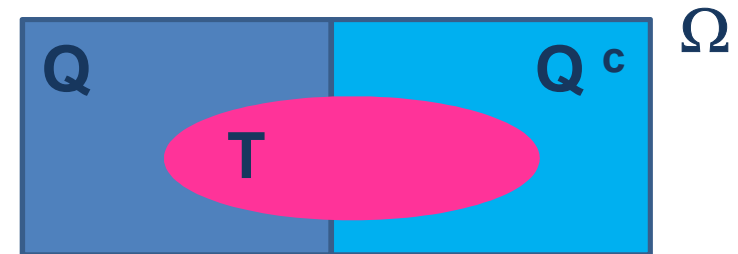
$$= 0.67 \cdot 0.6 + 0.20 \cdot 0.40 = 0.482$$

Q = “el candidato esta calificado para el cargo”

T = “el candidato esta capacitado en análisis estadístico”.

$$P(Q) = 0.60 \quad P(\bar{Q}) = 0.40$$

$$P(T/Q) = 0.67 \quad P(T/\bar{Q}) = 0.20$$



c. Si el empleado ha tenido capacitación en estadística, ¿cuál es la probabilidad de que este calificado para el cargo?

$$P(Q/T) = \frac{P(T \cap Q)}{P(T)}$$

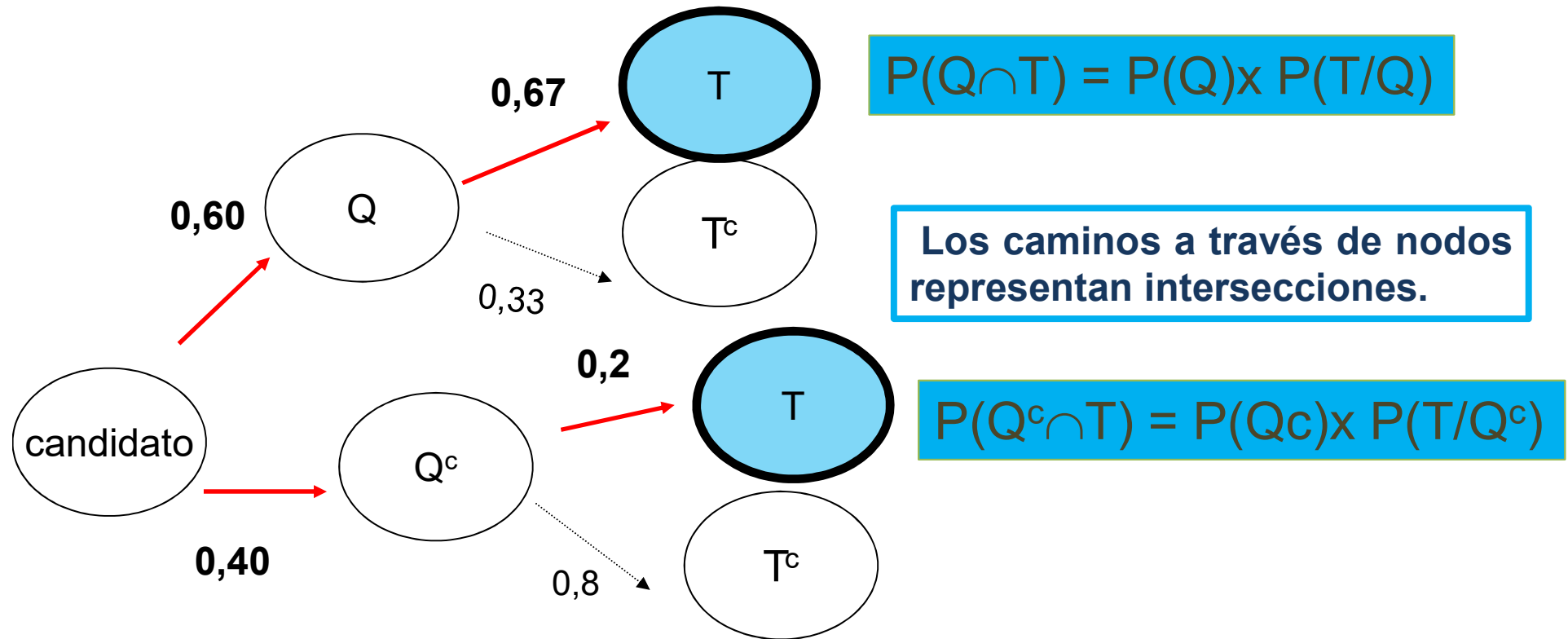
Ley del producto

$$P(T \cap Q) = P(T) P(Q/T)$$

$$P(T \cap Q) = P(Q) P(T/Q)$$

$$= \frac{P(T/Q) P(Q)}{P(T/Q) P(Q) + P(T/\bar{Q}) P(\bar{Q})} = \frac{0.402}{0.482} = 0.8340$$

# Expresión del problema en forma de árbol



Las bifurcaciones representan uniones disjuntas.

$$P(T) = P(Q \cap T) + P(Q^c \cap T)$$

# Ejemplo 11

Los miembros de una firma de consultoría alquilan automóviles en tres agencias:

**60%** a la agencia **A**

**30%** a la agencia **B** y el **10%** a la agencia **C**

De la agencia **A** el **9%** necesitan afinación, de la **B** el **20%** y de igual manera el **6%** de los autos de la agencia **C**.

- a.** ¿Cuál es la probabilidad de que un auto rentado a la firma requiera afinación?
- b.** Si un auto que alquilo la firma necesita afinación, ¿cuál es la probabilidad de que este vehículo provenga de la agencia **B**?

**Del enunciado se extrae la siguiente información:**

$$P(A) = 0.60 \quad P(B) = 0.30 \quad P(C) = 0.10$$

$$P(F/A) = 0.09 \quad P(F/B) = 0.20 \quad P(F/C) = 0.06$$

**A = “el auto fue alquilado a la agencia A”,**

**B = “el auto fue alquilado a la agencia B”,**

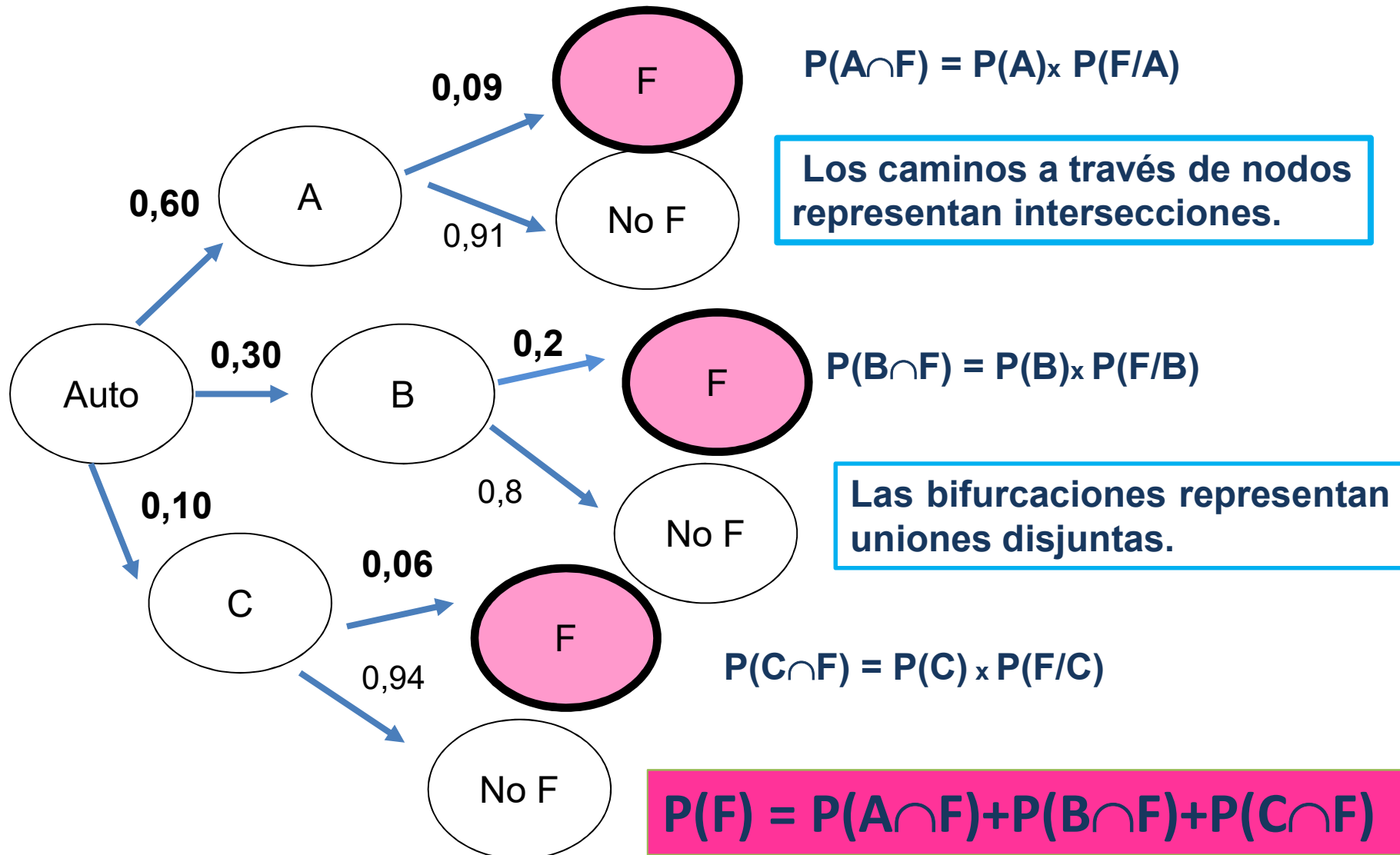
**C = “el auto fue alquilado a la agencia C” y**

**F = “el auto requiere afinación”.**

$$\begin{aligned} \text{a. } P(F) &= P(F/A) P(A) + P(F/B) P(B) + P(F/C) P(C) = \\ &= 0.09 \cdot 0.6 + 0.20 \cdot 0.30 + 0.06 \cdot 0.10 = 0.12 \end{aligned}$$

$$\text{b. } P(B/F) = \frac{P(F/B) P(B)}{P(F/A) P(A) + P(F/B) P(B) + P(F/C) P(C)} = \frac{0.20 \cdot 0.30}{0.12} = 0.5$$

# Expresión del problema en forma de árbol



**Ejercicio:** Dos compañías producen software informático. La primera proporciona el 70% y la segunda el 30% de la producción total. Se sabe que el 83% del software suministrado por la primera compañía se ajusta a las normas establecidas, mientras que sólo el 63% del suministrado por la segunda se ajusta a las normas. Calcular la probabilidad de que un determinado software haya sido suministrado por la primera compañía, si se sabe que se ajusta a las normas.