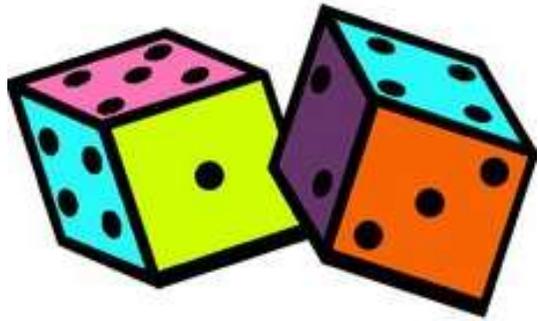


Unidad I

Probabilidad



Parte I



Teoría de probabilidades

1654 - Intercambio de correspondencia entre los matemáticos *Blaise Pascal* y *Pierre de Fermat*.

1657 - Se escribió el primer libro sobre probabilidades que trataba principalmente sobre problemas relacionados con los juegos de azar

1812 - *Pierre de Laplace* publicó *Théorie analytique des probabilités*, expone un análisis matemático sobre los juegos de azar, e indujo la primera definición explícita de probabilidad. Extendió la teoría de probabilidades a muchos problemas científicos y prácticos.

1933 - *Kolmogorov* da una definición axiomática de probabilidad matemáticamente rigurosa que al mismo tiempo permite su aplicación a un amplio espectro de fenómenos.

En 1654, **Blas Pascal** y **Pierre Fermat**, mantuvieron abundante correspondencia sobre dos problemas de apuestas planteados por un caballero llamado **Antoine Gombard (caballero de Merè)**, filósofo y escritor, y un experto jugador. Las soluciones que ellos encontraron sentaron las bases del **cálculo de probabilidades** y de la **teoría de juegos**.

- **La apuesta interrumpida** debe decidirse como repartir el monto apostado por dos jugadores que debió interrumpirse antes de terminar y calcularse la probabilidad de ganar en caso de terminar el juego.
- **Apuestas ventajosas: consiste en:**
 - 1) lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría **por lo menos un seis**; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego.
 - 2) propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que **la pareja de seis aparecería por lo menos una vez**.

LA APUESTA INTERRUMPIDA

(problema planteado por caballero de Meré)

El Caballero de Mére fue un filósofo y escritor, aficionado a las matemáticas que vivió durante el reinado de Luis XIV.

Dos personas **A** y **B** se encuentran jugando con una moneda. **A** y **B** deben cada uno escoger entre cara o cruz, tirando la moneda al aire, y apuestan **32** pesos cada uno a que la suya será la primera en salir **3 veces**. Es decir, gana el primero en obtener tres caras o tres cruces.



En un momento determinado, la partida debe interrumpirse. Si en ese instante lo que escogió **A** ha salido **2** veces, mientras lo que eligió **B** salió sólo **una**, **¿cómo debería repartirse la apuesta?**

LA APUESTA INTERRUMPIDA

Quizá lo primero que se pensaría es que, como van **2 a 1**, los **64 pesos** deberían repartirse siguiendo esta proporción:

- el jugador **A** se llevaría **dos terceras partes**, i.e., **42 pesos con 67 centavos**,
- **B** se quedaría con los **21 pesos con 33 centavos** restantes.

Teniendo en cuenta que **A** estaba a punto de ganar la partida, ¿le parecerá satisfactorio el reparto? ¿Y si fuera usted el que va perdiendo? Teniendo ahora en cuenta que aún podría remontar el tanteo y acabar ganando la partida ¿se conformaría con una tercera parte del dinero?

Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tiradas de una moneda hasta que **su cara elegida** sea la **primera** en **salir tres veces** y pone cada uno **32** pesos en la apuesta:

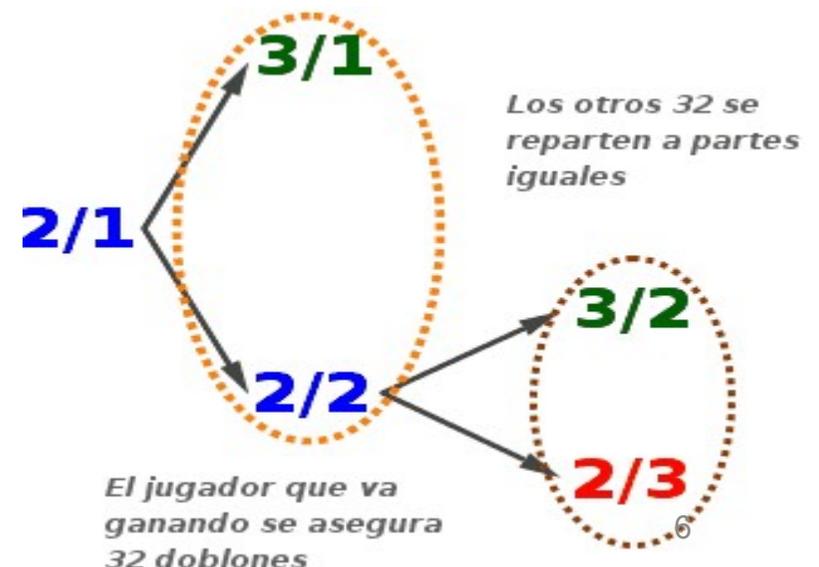
Si **A** tiene **2** puntos y **B** tiene **1** punto.

Si vuelven a lanzar la moneda las posibilidades son tales que:

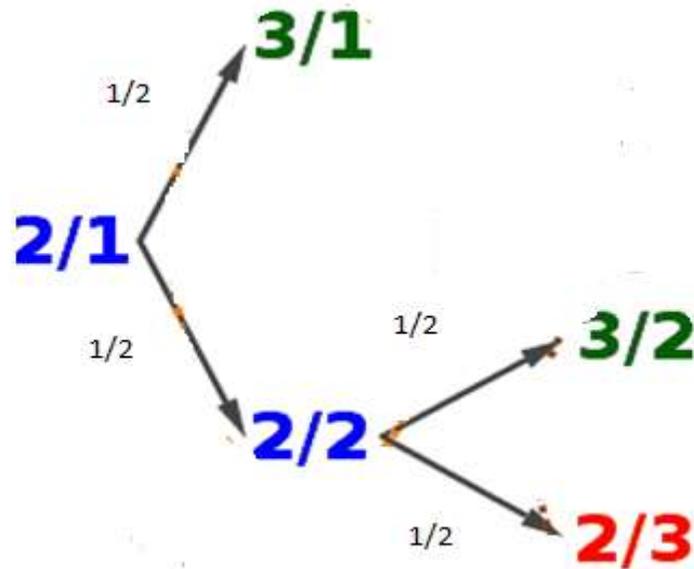
- Si el **jugador A** gana, ganará el total en la apuesta, es decir **64 pesos**.
- Pero si es el **B** el que gana, estarán **2 a 2** y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, cada uno tomará su apuesta, es decir, **32 pesos cada uno**.

El **jugador A** tiene seguros los **32 pesos**, pues incluso si pierde los recibirá. Los **32 pesos restantes**, quizás los gane o quizás no, el riesgo es el mismo.

Pistonesi Silvina



Idea de Pascal



La probabilidad de que el jugador A gane es:

$$P(A) = 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$$

Luego A debe cobrar:

$$3/4 \cdot 64 = 48 \text{ pesos (75\% de los \$64)}$$

La probabilidad de que el jugador B gane es:

$$P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$$

Luego B debe cobrar:

$$1/4 \cdot 64 = 16 \text{ pesos (25\% de los \$64)}$$



Pistonesi Silvina

Apuestas ventajosas:

1) lanzar un dado cuatro veces consecutivas y apostar que saldría **por lo menos un seis**; si el seis no saliese, entonces el oponente ganaría el juego.

www.matalasmates.es

Caballero de Mere
Problema 1

¿Es ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un 6 en una serie de 4 lanzamientos de un dado?

■ **Apuestas ventajosas:**

2) propone lanzar dos dados 24 veces y apostar que **la pareja de seis aparecería por lo menos una vez.**

<https://www.youtube.com/watch?v=9ybaQBzwklw>

Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades

- Esperanza de vida

Es una medida del promedio de años que se espera que viva una persona.

Se basa en el cálculo de la probabilidad de que una persona nacida en un determinado año muera a una edad concreta, teniendo en cuenta los factores demográficos.



Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades

En la actualidad vemos que la **teoría de probabilidad** ocupa un lugar muy importante en muchos **asuntos de negocios**. Por ejemplo, las **pólizas de seguros de vida, seguros médicos,** como así también de **seguros de automóviles,** entre otros.

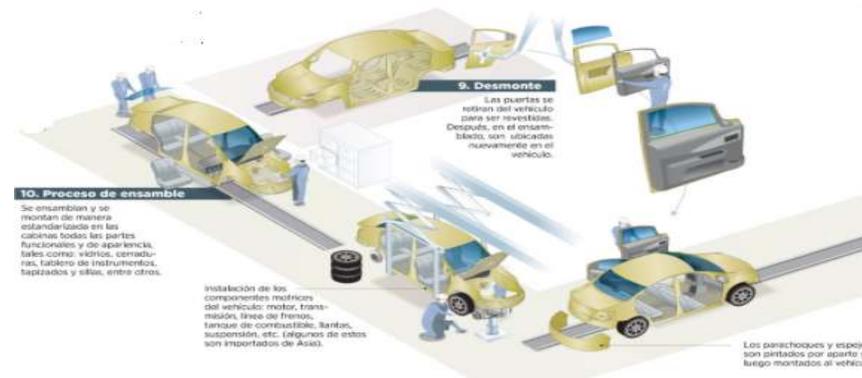


Las compañías de seguros de autos analizan la edad y el historial del cliente en el momento de decidir el tipo de prima que va a aplicar. Si ha tenido varios accidentes lo más probable es que pueda tener otro por lo que su prima será más alta.



Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades

La probabilidad también juega un papel relevante en la estimación de **unidades defectuosas en un proceso de fabricación**, probabilidades de ventas de un **nuevo producto**.



Incluso, se utiliza la teoría de probabilidad en **apuestas de eventos deportivos**, etc.



Aplicaciones de la Teoría de Probabilidades

- Meteorología

Las predicciones que realizan los meteorólogos respecto del clima que se tendrá en los próximos días, se efectúan en base a los patrones de lo que ha ocurrido en años anteriores y se expresa en términos de probabilidad: "la probabilidad de que llueva es del 0.90"

| DOMINGO | LUNES | MARTES | MIÉRCOLES | JUEVES |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 10/06 +29° +19° | 11/06 +24° +15° | 12/06 +18° +7° | 13/06 +15° +5° | 14/06 +12° +6° |
| VIERNES | SÁBADO | DOMINGO | LUNES | MARTES |
| 15/06 +16° +6° | 16/06 +13° +4° | 17/06 +16° +3° | 18/06 +18° +3° | 19/06 +23° +6° |

- Decisiones médicas

Si un paciente necesita que le realicen una cirugía, querrá saber cuál es la probabilidad de éxito para decidir si se opera o no.

Si tiene que iniciar un tratamiento, sería deseable conocer la probabilidad de éxito en base a los resultados obtenidos previamente en otros pacientes.



Teoría de Probabilidades: Conceptos Básicos

Experimento es toda acción que se realiza con el fin de observar el resultado.

Existen dos tipos de experimentos:

- **Determinísticos:** Son aquellos que repetidos en las mismas condiciones dan el mismo resultado, por lo tanto, son predecibles.
- **Aleatorios:** Son aquellos que si se repiten bajo las mismas condiciones dan resultados distintos. Todos los resultados posibles se conocen de antemano. Pero se desconoce cual de ellos se va a dar. Los resultados dependen del azar.

■ Ejemplos de Experimentos Determinísticos:

- Calentar agua a 100°C se produce la evaporación (alcanza el punto de ebullición).

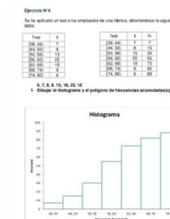


- Si dejamos caer al interior de un pozo una piedra desde su boca, por muchas veces que repitamos el proceso, obtenemos el mismo resultado la piedra cae al fondo.

- Si se mezclan cloro y sodio el resultado obtenido siempre será la sal que consumimos.



- Un examen parcial con ninguna respuesta correcta produce siempre el mismo resultado: CERO



■ Ejemplos de Experimentos Aleatorios:

1. Se lanza una moneda tres veces y se anotan sus caras superiores.



2. Se tira un dado hasta obtener un uno.

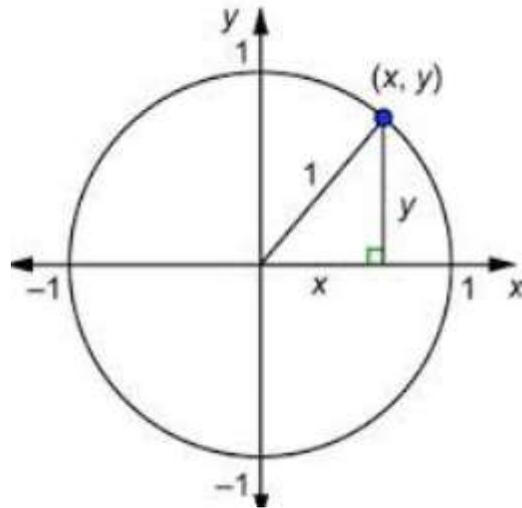
3. Se registra el número de archivos infectados por virus en tu PC por mes.



4. Se registra el tiempo que se tarda en ejecutar un programa (en seg).

```
if (e.getKeyCode() == 10) {
    s1.setText("Se lanzó moneda de : ESTE");
    s2.setText("Su código numérico es : " + e.getKeyCode());
} else {
    if (e.getKeyCode() == 17) {
        s1.setText("Se lanzó moneda de : CONTROL");
        s2.setText("Su código numérico es : " + e.getKeyCode());
    } else {
        if (e.getKeyCode() == 18) {
            s1.setText("Se lanzó moneda de : ALT");
            s2.setText("Su código numérico es : " + e.getKeyCode());
        } else {
            if (e.getKeyCode() == 40) {
                s1.setText("Se lanzó moneda de : SHIFT");
                s2.setText("Su código numérico es : " + e.getKeyCode());
            } else {
                s1.setText("Se lanzó moneda de : ");
            }
        }
    }
}
```

6. Se elige al azar un punto en el círculo unitario centrado en $(0, 0)$.



Los **experimentos Aleatorios** son de interés para la estadística.

Espacio Muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un Experimento Aleatorio. Se denota con la letra griega Ω (omega).

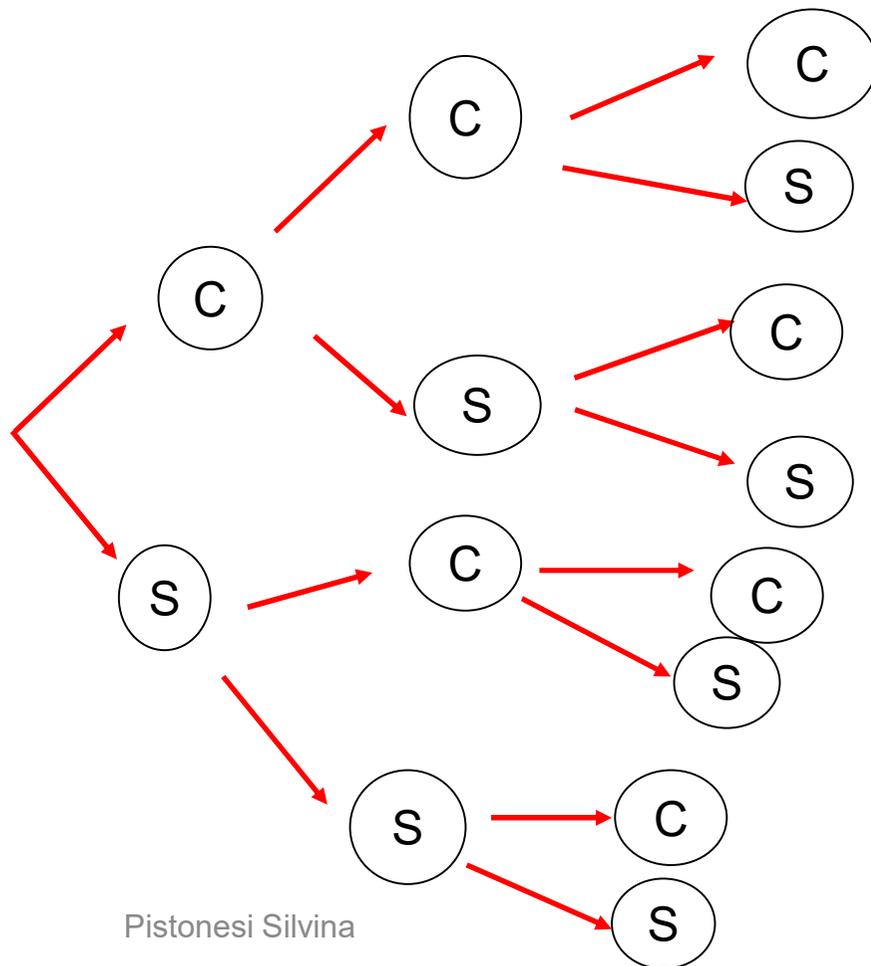
Según el **número de elementos** que contenga el **espacio muestral** se clasifica en:

- **Finito**
- **Infinito numerable (contable)**
- **Infinito no numerable**

El espacio muestral asociado a cada experimento aleatorio es el siguiente:

1. Se lanza una moneda tres veces y se anotan sus caras superiores.

■ $\Omega = \{(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (s,c,c), (s,s,s), (s,s,c), (s,c,s), (c,s,s)\}$. **Finito.**



**Espacio muestral,
notación conjunto**



**Espacio muestral,
notación árbol**

Espacios muestrales

El **espacio muestral** asociado a cada experimento aleatorio es el siguiente:

2. Se tira un dado hasta obtener un uno (U).

▪ $\Omega = \{ U, (U^c, U), (U^c, U^c, U), (U^c, U^c, U^c, U), \dots \}$ **Infinito numerable.**

3. Se registra el número de archivos infectados por virus en tu PC por mes.

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ **Infinito numerable**



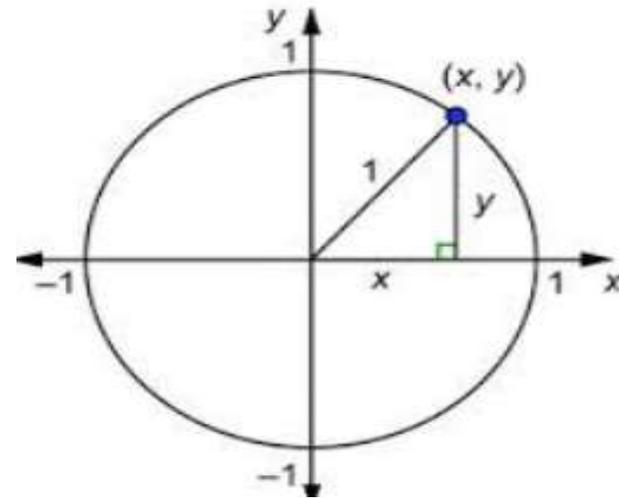
4. Se registra el tiempo que se tarda en ejecutar un programa (en seg).

$\Omega = (0, t_0], t_0 > 0$ ó $\Omega = (0, \infty)$ **Infinito no numerable.**



5. Se elige al azar un punto en el círculo unitario centrado en $(0, 0)$.

$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \}$.
Infinito no numerable.



Eventos: tipos

Suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral Ω . Esto es, un evento es un conjunto de resultados de un experimento. Se denota: A, B C, ...

Puede clasificarse en:

- **Evento elemental o simple:** es un resultado básico de un experimento; no puede descomponerse en resultados más simples. Está formado por un único elemento del espacio muestral.
- **Evento compuesto:** es el suceso formado por más de un evento elemental.

Ejemplos

- Se lanza un dado al aire:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Evento simple: $A = \{\text{obtener un cuatro}\} = \{4\}$

Evento compuesto: $B = \{\text{sale un número primo}\} = \{2, 3, 5\}$



- Se lanza una moneda tres veces al aire:

$$\Omega = \{(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (s,c,c), (s,s,s), (s,s,c), (s,c,s), (c,s,s)\}.$$

Evento simple: $A = \{\text{obtener tres caras}\} = \{(c,c,c)\}$

Evento compuesto: $B = \{\text{sale cara en la tercer tirada}\} = \{(c,c,c), (c,s,c), (s,c,c), (s,s,c)\}$

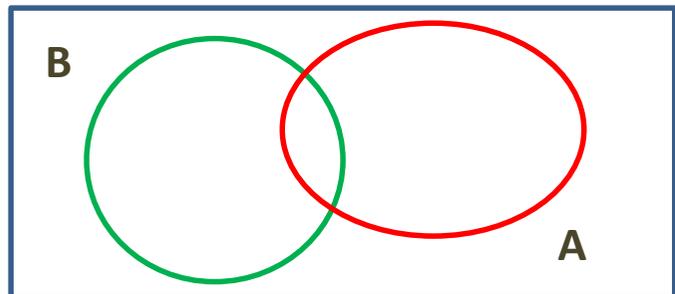
Eventos: tipos

El espacio muestral Ω se denomina **Evento Seguro**.
Ocurre siempre que se realiza el experimento.

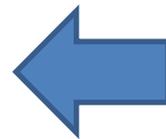
Se denomina **Evento imposible** a aquel que nunca puede ocurrir. Se denota \emptyset .

Ejemplo: Si el Exp. consiste en tirar un dado al aire, el evento: O =“sacar un ocho”
 O es un evento imposible.

Tanto el **espacio muestral** como los sucesos o eventos son conjuntos.



Ω

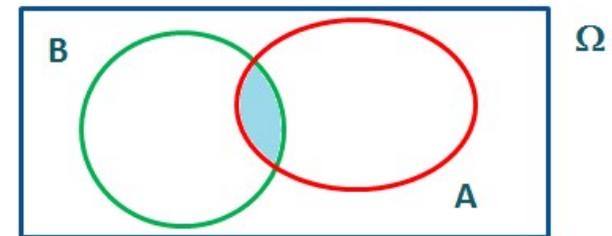


Representación Gráfica
diagramas de Venn

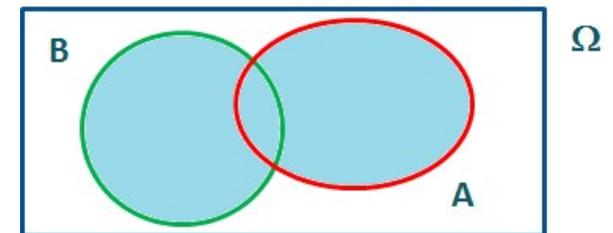
Operaciones entre eventos

Dado un experimento aleatorio E , Ω el espacio muestral asociado, y sean A y B dos eventos cualesquiera, se define:

• **Evento intersección:** al evento que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente, y se **denota** $A \cap B$.

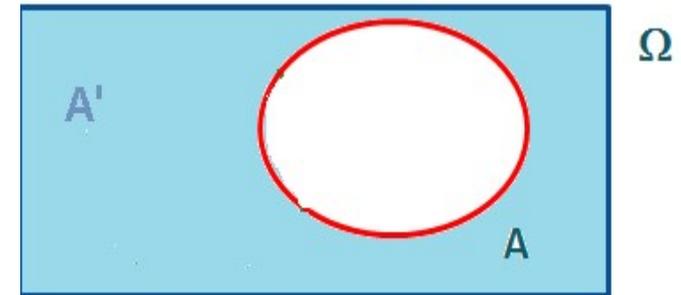


• **Evento unión:** al evento que ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B . Se **denota** $A \cup B$.

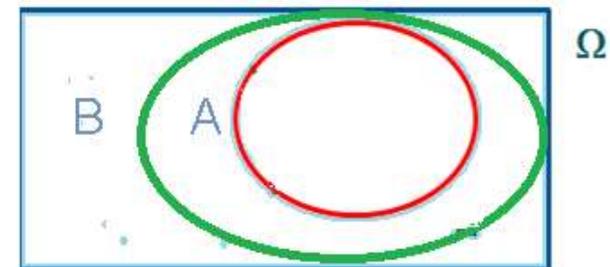


Operaciones entre eventos

• **Evento complemento:** al evento que ocurre cuando no ocurre A, y se **denota** \bar{A} ó A^c ó A' . Es el evento formado por todos los elementos que no están en A. $A \cup A' = \Omega$.

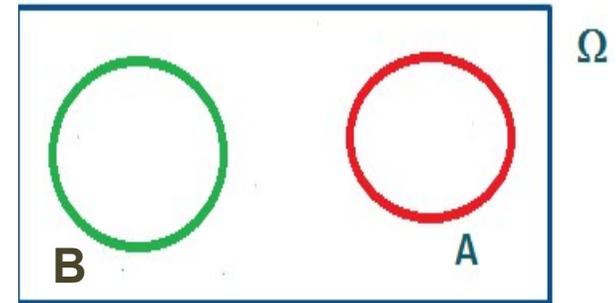


Un evento A se dice **incluido o contenido** en un evento B si cada vez que ocurre A, ocurre B. Todo elemento de A pertenece a B, se **denota** $A \subseteq B$.

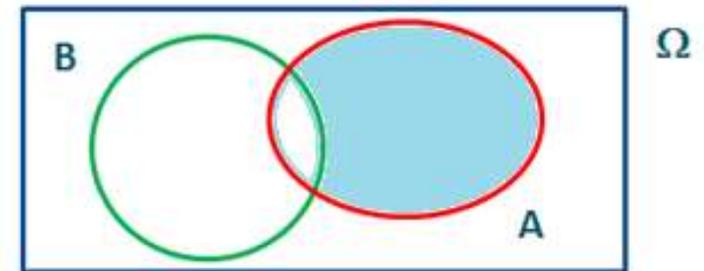


Operaciones entre eventos

Dos eventos A y B se dicen **eventos mutuamente excluyentes o disjuntos o incompatibles** si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Es decir, si la intersección entre ellos es vacía. Se **denota** $A \cap B = \emptyset$.



Evento diferencia: la **diferencia** entre el evento A y el B es un evento constituido por los elementos de A pero no pertenecen a B . Es decir, evento que ocurre cuando ocurre A y no B . Se **denota** $A - B$ ó $A \setminus B$.



Ejemplo

Se lanza al aire un dado. Se definen los siguientes eventos asociados al correspondiente espacio muestral Ω :

El espacio muestral es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A = “obtener par”  $A = \{2, 4, 6\}$

B = “salga un número múltiplo de 3”  $B = \{3, 6\}$

D = “salga un número menor que 3”  $A = \{1, 2\}$

Calcular: $A \cup B$, $A \cap B$, B^c , $B \cap D$ y $A - B$

$A \cup B =$ « números pares o múltiplos de 3 »  $A \cup B = \{3,4,2,6\}$

$A \cap B =$ « números pares que sean múltiplos de 3 »  $A \cap B = \{6\}$

$B^c =$ « números que no son múltiplos de 3 »  $B^c = \{1,2,4,5\}$.

Ejemplo 1

Lanzamiento de un dado.

El espacio muestral es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A = “obtener par”

B = “salga un número múltiplo de 3”

D = “salga un número menor que 3”

$B \cap D =$ «números menores que 3, que sean múltiplo de 3»



$B \cap D = \emptyset$, B y D son eventos mutuamente excluyentes.

$A - B =$ «números pares que no sean múltiplo de 3»



$$A - B = \{2,4\}$$

Ejemplo 2

Sean los sucesos: $F = \{\text{usuario de Facebook}\}$, $I = \{\text{usuario de Instagram}\}$ y $T = \{\text{usuario de Twitter}\}$. Expresar mediante las operaciones de sucesos:

a) Ser usuario de las tres redes sociales.

$$F \cap I \cap T$$



b) Ser usuario de al menos una red social.

c) Ser usuario de Twitter, pero no de Instagram ni de Facebook.

d) No ser usuario de ninguna de las tres redes sociales.

e) Ser usuario de sólo una red social.

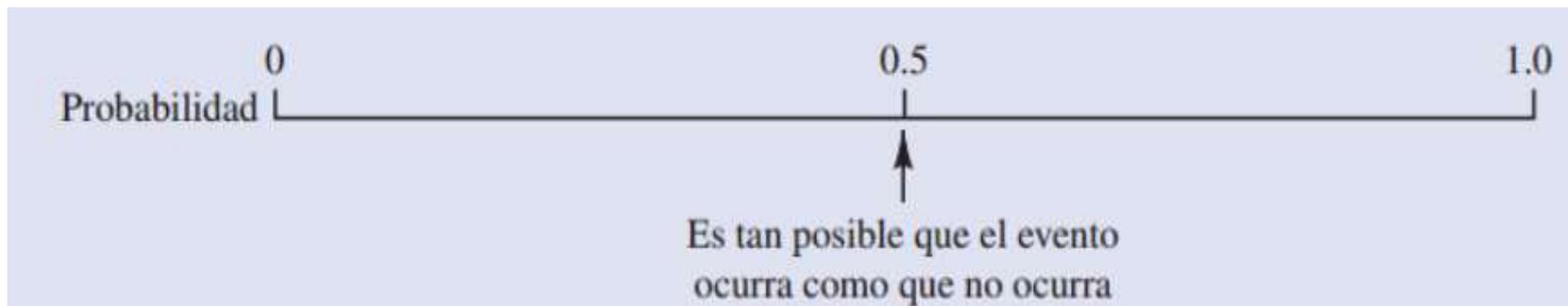
Noción probabilidad

La **probabilidad** de un evento es una medida de la posibilidad de ocurrencia de ese evento.

Probabilidad



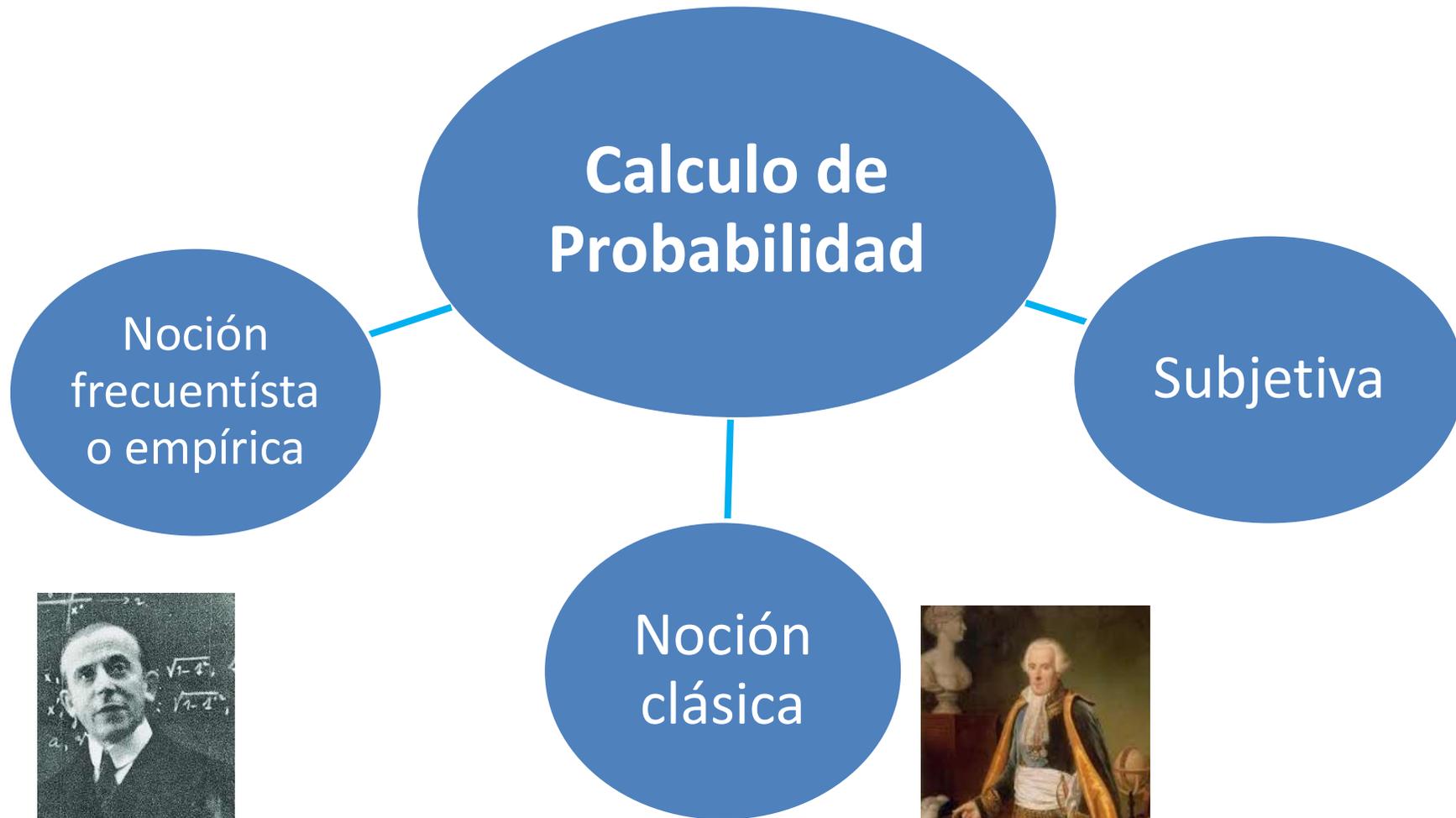
Un número real entre 0 y 1.



Cuanto mayor sea la posibilidad de que ocurra un evento, su probabilidad estará más próxima a **1**. La probabilidad de la certeza es **1**. La probabilidad de una imposibilidad es **0**.

$$0 \leq P(A) \leq 1, A \text{ es un evento cualquiera}$$

Cálculo de probabilidad



(Von Mises)



(Laplace)

Calculo de probabilidad

1. Noción empírica o frecuentísta o «a posteriori» de probabilidad

Se estima la probabilidad de un evento **A**, a través de la *frecuencia relativa* del evento **A**.

Si se repite n veces un experimento aleatorio en forma independiente y bajo las mismas condiciones, denotamos: f_A es el número de veces que ocurre el suceso **A** en las n repeticiones. La **frecuencia relativa del suceso A**, f_{rA} , se define:

$$f_{rA} = \frac{f_A}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de veces que ocurre } A}{\text{n}^\circ \text{ de repeticion es del experimento}}$$

Noción empírica

La evidencia empírica muestra que cuando n crece indefinidamente, tiende f_{rA} a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos $P(A)$, es decir ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{rA} = P(A).$$

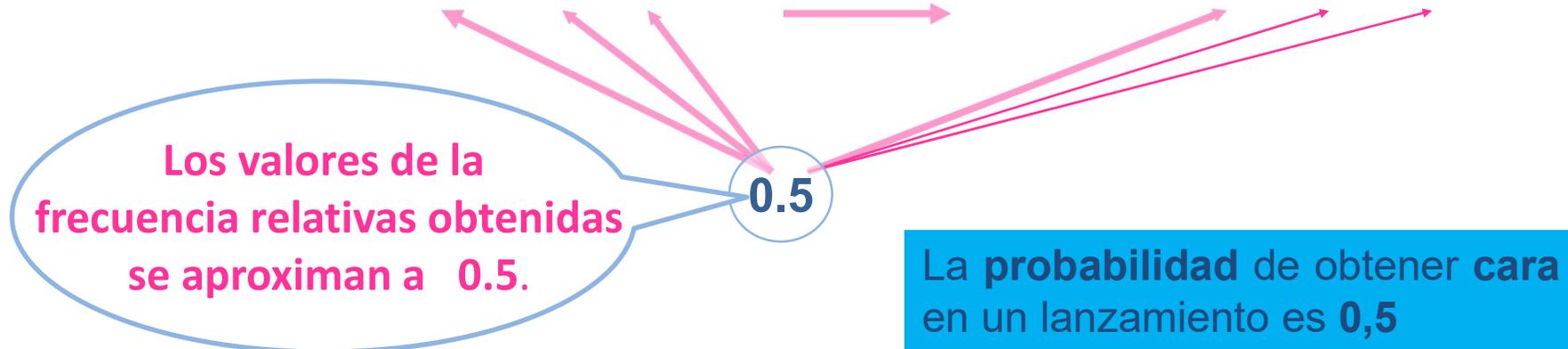
El postulado preciso de esto es la **Ley de los Grandes Números**, uno de los teoremas fundamentales de la probabilidad. Este establece que si realizamos n ejecuciones de un experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un evento** puede ser usada como una aproximación de la probabilidad de **A**. Esta aproximación es llamada la **probabilidad empírica de A**.

$$P(A) \cong f_{rA} = \frac{f_A}{n} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de veces que ocurre } A}{\text{n}^\circ \text{ de repeticion es del experimento}}$$

Noción empírica

Se ha lanzado una moneda **200** veces. Y se observa el “número de caras” después de 20, 40, 60, ... 200 tiradas, se da en la tabla:

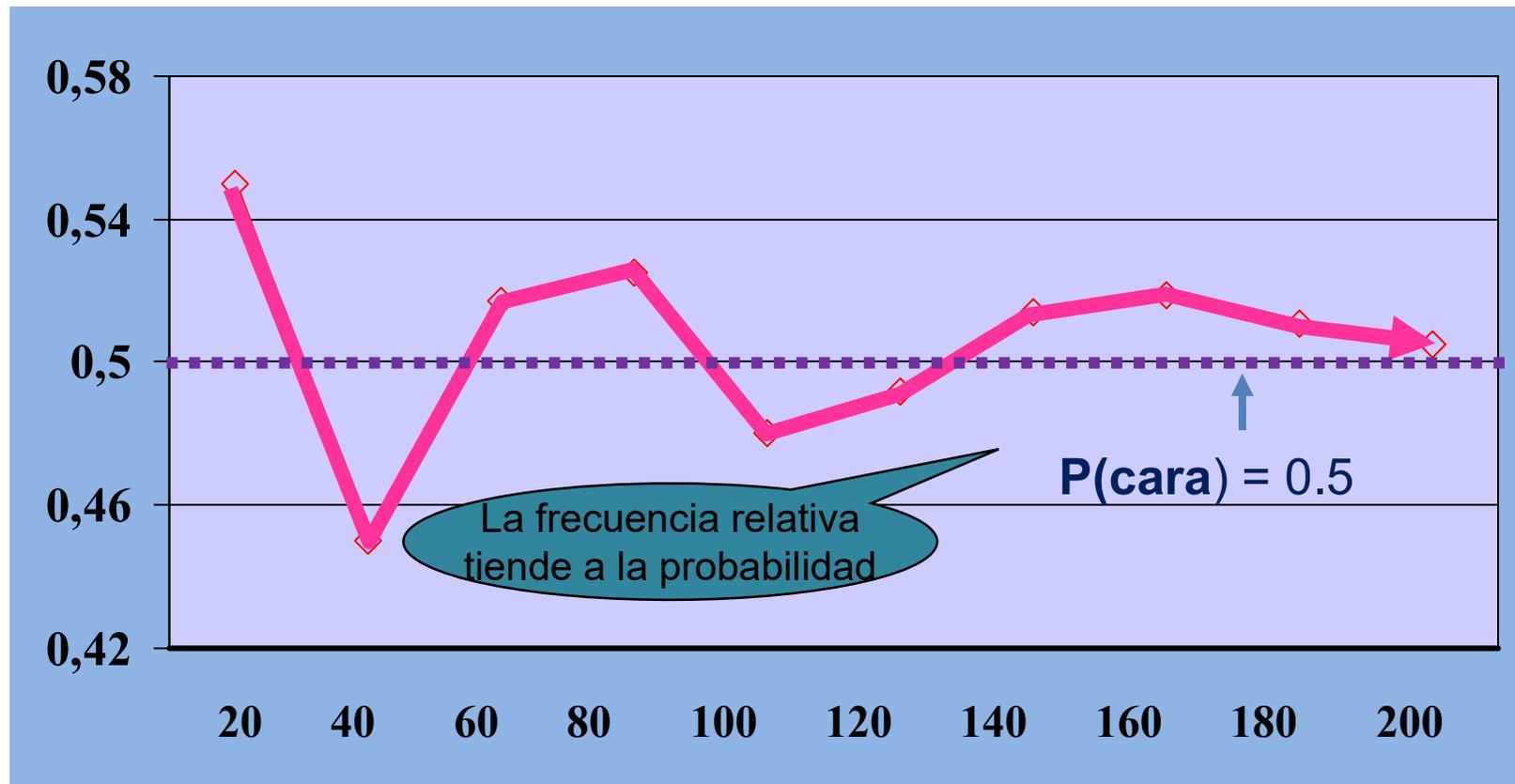
| | | | | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Pruebas | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |
| Nº de caras | 11 | 18 | 31 | 42 | 48 | 59 | 72 | 83 | 92 | 101 |
| Fr. relativa | 0.550 | 0.450 | 0.517 | 0.525 | 0.480 | 0.492 | 0.514 | 0.519 | 0.511 | 0.505 |



La **frecuencia relativa** de un suceso tiende a aproximarse a su probabilidad cuando el número de pruebas crece indefinidamente.

Noción empírica

Trazando la poligonal de frecuencias relativas correspondiente al número de caras obtenidas al lanzar una moneda 20, 40, 60, ... 200 veces, se observa:



Proposición:

Sea A un suceso cualquiera de un espacio de muestral Ω , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La frecuencia relativa de A es un número comprendido entre 0 y 1: $0 \leq \text{fr}_A \leq 1$.
2. Si $A = \Omega$, entonces la frecuencia relativa es 1: $\text{fr}_\Omega = 1$.
3. Si $A = \emptyset$, entonces la frecuencia relativa es 0: $\text{fr}_\emptyset = 0$.
4. Si B es **incompatible** con A , entonces la frecuencia relativa del suceso unión es la suma de las respectivas frecuencias relativas: Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{fr}_{A \cup B} = \text{fr}_A + \text{fr}_B$.

Noción empírica o frecuentista de probabilidad

Ejemplo: Se desea estimar la probabilidad de llegar tarde al trabajo,

$P(\text{Llegar tarde al trabajo}) \cong$

$$\frac{\text{N}^\circ \text{ de veces que llegué tarde}}{\text{N}^\circ \text{ total de llegadas consideradas}}$$



Se consideran al azar las últimas **120** llegadas al trabajo y se observó que en **10** de ellas se llegó tarde,

$$P(\text{llegar tarde al trabajo}) \cong 10 / 120 = 0.083$$

La probabilidad de llegar tarde al trabajo es de aprox. **0.083**.
El **8,3 %** de las veces que concurro al trabajo, llego tarde.

Ejemplo

Un negocio minorista realizó un estudio del número de laptops vendidas diariamente, considerando la información de los últimos 118 días, que se muestra en la siguiente tabla :

| N° de computadoras vendidas | N° de días |
|-----------------------------|------------|
| 0 | 12 |
| 1 | 20 |
| 2 | 43 |
| 3 | 18 |
| 4 | 25 |



Estimar la probabilidad de que el número de computadoras que se venderán hoy sea:

a. Ninguna

b. a lo sumo dos

c. al menos tres

Determinar la *probabilidad aproximada* de que el número de computadoras que se vendan hoy sean:

a. Ninguna

Se define el evento N = « no vender ninguna hoy»

$$P(N) \cong 12/118 = 0.10$$

b. A lo sumo dos

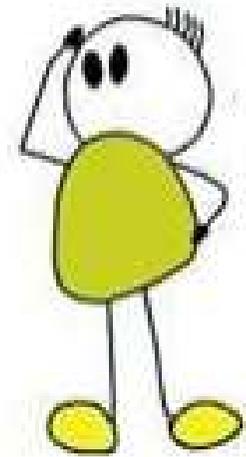
Se define el evento D = « vender a lo sumo 2 hoy»

$$P(D) \cong 12/118 + 20/118 + 43/118 = 75/118 = 0.64$$

c. Al menos tres

Se define el evento T = « se venden al menos 3 hoy»

$$P(T) \cong 18/118 + 25/118 = 43/118 = 0.36$$



Importante!!!!!!!



Cuando se usa la definición **frecuentísta** o «**a posteriori**», es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La **frecuencia relativa** obtenida es únicamente una **estimación** del valor real de la probabilidad de que se de el suceso.
- Cuanto mayor sea el número de veces que se repite el experimento, **mejor** será la estimación de la probabilidad, i.e., a mayor número de ensayos mejor será la estimación.

OJO!!! La validez de emplear esta definición depende de que las condiciones en que se realizó el experimento sean repetidas idénticamente.

Calculo de probabilidad

2. Noción clásica o «a priori» de probabilidad

Sea **E** un experimento aleatorio, tal que:

- su espacio muestral Ω está formado un número finito, n , de resultados,
- cada uno de los resultados del experimento posee la misma posibilidad de ocurrir, i.e., son **equiprobables**.

La **probabilidad** de un **evento A** puede calcularse contando

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de resultados favorables al suceso A}}{\text{N}^\circ \text{ de resultados posibles del experimento}}$$

Ejemplos

Experimento: Se selecciona al azar una carta del mazo de 52 cartas (baraja francesa, cartas de poker),

a) ¿cuál es la probabilidad de sacar una K?



$K =$ "la carta es una K"

$$P(K) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{4}{52} = 0.0769$$



b) ¿cuál es la probabilidad de sacar una carta de diamante?

$T =$ "la carta es de diamante"

$$P(T) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{13}{52} = 0.25$$



Ejemplos

Experimento: Se lanza una vez un dado al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número divisible por 3?

Recordar: *Un número entero a es **divisible** por otro entero b (no nulo) si existe un entero c tal que $a = b * c$. Es decir, el resto de la división es cero.*

El espacio muestral es $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \ll \text{número divisible por 3} \gg = \{3, 6\}$

$$P(A) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{2}{6} = 0.\hat{3}$$



Calculo de probabilidad por medio del Análisis Combinatorio

Sea **E** un experimento aleatorio cuyo espacio muestral Ω es **finito**, tal que cada evento elemental con la **misma posibilidad de ocurrir**, para calcular la probabilidad de cualquier evento **A**, se determina contando eventos elementales que pertenecen a él, dividido el cardinal de Ω . Para ello usamos la **teoría combinatoria**.

Permutaciones de n elementos: Dados n elementos distintos, el número de secuencias ordenadas diferentes de éstos n elementos es:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutaciones con repetición de n elementos, con n_i repeticiones del i -ésimo elemento, $i = 1, \dots, k$: Dados n elementos, de los cuales hay sólo k diferentes (n_1 iguales, n_2 iguales, \dots , n_k iguales, con $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), el número de secuencias ordenadas diferentes de éstos n elementos es:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!)$$

Variaciones de n elementos tomados de a m , con $m \leq n$: Dados n elementos distintos, el número de selecciones ordenadas de m de ellos es

$$V_n^m = n! / (n - m)!$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de a m : Dados n elementos distintos, el número de selecciones ordenadas de m de ellos, pudiendo ocurrir que un mismo elemento aparezca más de una vez en la selección, es

$$V_n^{\prime m} = n^m$$

Combinaciones de n elementos tomados de a m , con $m \leq n$: Dados n elementos distintos, el número de seleccionar m de ellos, sin importar el orden, viene dado por

$$C_n^m = n! / m! (n - m)!$$

Ejemplos:

1. Se desea formar números de 5 cifras con los dígitos 1,2,3,4 y 5.



- a) Si no se utiliza un dígito dos veces , ¿cuántos números pueden formarse?
- b) Si no se utiliza un dígito dos veces , encuentre el número total de números que terminan en 3. Determinar la probabilidad de este evento.
- c) Si no se pueden repetir los dígitos , encuentre el número total de números pares. Determinar la probabilidad de este evento.

Si no se utiliza un dígito dos veces , ¿cuántos números pueden formarse?

— — — — —

Para el primer dígito hay 5 posibilidades: 1, 2 ,3 ,4 ó 5.

Como no pueden repetirse, para el próximo se tienen 4 posibles dígitos, para el tercero 3 , para el cuarto 2 y para el quinto 1. Como estas condiciones se deben dar en simultáneo, entonces se tiene,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = P_5 = 120 \text{ números de 5 cifras distintos.}$$

b) Si no se utiliza un dígito dos veces , encuentre el número total de números que terminan en 3. Determinar la probabilidad de este evento.

— — — — 3

Como no pueden repetirse dígitos, para el primer dígito se tienen 4 posibilidades: 1, 2 ,4 ó 5, para el próximo hay 3 posibles dígitos, para el tercero 2 dígitos , y para el cuarto sólo 1 dígito. Como estas condiciones se deben dar en simultáneo, entonces se tiene:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = P_4 = 24 \text{ números de 5 cifras terminados en 3.}$$

Sea el evento **T**= « el número de 5 cifras termina en tres»

La probabilidad:

$$P(T) = 4!/5! = 0.2$$

Ejemplos:

2. Se desea formar distintas palabras (con o sin sentido) con todas las letras de la palabra BANANA.

Banana

a) ¿cuántas palabras pueden formarse?

La palabra BANANA posee 6 letras: una B, 3 A y 2 N. Al cambiarlas de orden para formar palabras distintas con y sin sentido, hay que tener en cuenta las letras repetidas. Con lo cual para que al ordenarlas no construya palabras ya obtenidas utilizo las permutaciones con repetición, que tienen en cuenta el orden y las letras repetidas:

$$P_6^{2,3} = \frac{P_6}{P_2 P_3} = \frac{6!}{2! 3!} = \frac{720}{1 \cdot 2 \cdot 6} = 60$$

b) ¿Cuántas palabras empiezan con N? Determinar la probabilidad de este evento.

Sea N = «sea una palabra que comienza con N»: N _ _ _ _

$$P_5^3 = \frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

con lo cual,

Pistonesi Silvina

$$P(\mathbf{N}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Ejemplos:

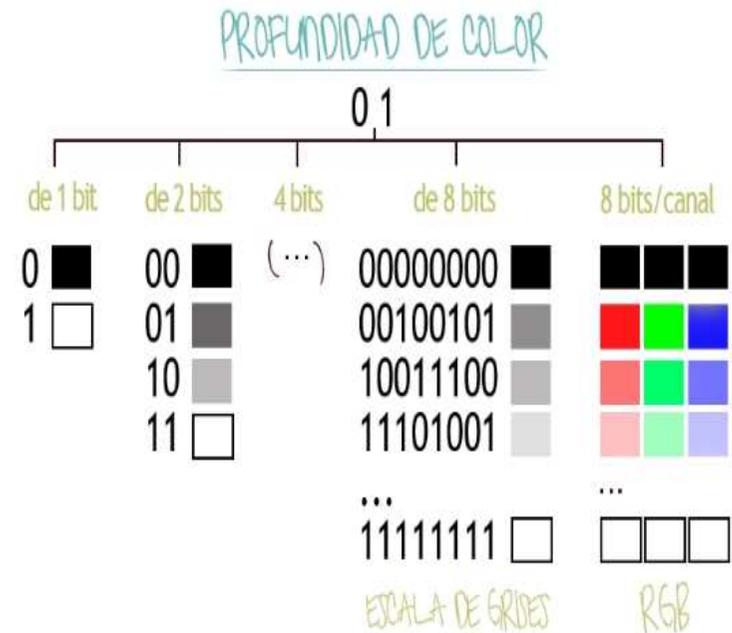
3. Se desea formar distintas cadenas de 8 bits utilizando 5 unos y 3 ceros.

a. ¿Cuántas hay?

b. ¿qué probabilidad de que las cadenas comiencen y terminen con cero?

La **profundidad de color** o **bits por píxel (bpp)** es un concepto de la computación gráfica que se refiere a la cantidad de bits de información necesarios para representar el color de un píxel en una imagen digital o en un framebuffer.

El bit es un dígito binario. Una profundidad de **n bits** implica que cada píxel de la imagen puede tener 2^n posibles valores y por lo tanto, representar 2^n colores distintos. Cuanto más alta sea la profundidad de bit, más colores puede contener una imagen



a. ¿Cuántas hay?

La cadena esta compuesta de 8 bits: 3 ceros y 5 unos. Al cambiar de orden los bits para formar cadenas distintas, hay que tener en cuenta los dígitos repetidos. Con lo cual para que al ordenarlos no construya una cadena ya obtenida, se utilizan las permutaciones con repetición, que tienen en cuenta el orden y dígitos repetidos:

$$P_8^{3,5} = \frac{P_8}{P_3 P_5} = \frac{8!}{3! 5!} = \frac{40320}{6 \cdot 120} = 56$$

b. ¿qué probabilidad de que las cadenas comiencen y terminen con cero?

Sea el evento **C** = «la cadena comienza y termina en cero»: **0** _ _ _ _ _ **0**

$$P_6^5 = \frac{P_6}{P_5} = \frac{6!}{5!} = \frac{720}{120} = 6 \text{ Cadenas que comienzan y terminan en 0, con lo cual,}$$

$$P(C) = \frac{6}{56} = 0.1071$$

Ejemplos:

4. Se desea abrir una caja fuerte se requiere de la selección correcta de un conjunto de cuatro dígitos en sucesión. Los dígitos (1,...,9) se fijan presionando cada uno alternativamente.

- a) Si no se utiliza un dígito dos veces , encuentre el número total de las posibles combinaciones.
- b) Si no se utiliza un dígito dos veces , encuentre el número total de combinaciones que comienzan con el 2. Determinar la probabilidad de este evento.
- c) Si pueden repetir los dígitos, encuentre el número total de las posibles combinaciones y cuántos comienzan en 2.



Se desea seleccionar un conjunto de cuatro dígitos en sucesión entre los dígitos: 1,...,9.

a) Si no se utiliza un dígito dos veces , encuentre el número total de las posibles combinaciones .

— — — —

Para el primer dígito se tienen 9 posibilidades: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9.

Como no pueden repetirse, para el próximo hay 8 posibles dígitos, para el tercero 7 , y para el cuarto 6. Como estas condiciones se deben dar en simultáneo, entonces se tienen:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$$



$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024 = V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

3024 combinaciones distintas para la caja de seguridad.

Se desea seleccionar un conjunto de cuatro dígitos en sucesión entre los dígitos: 1,...,9.

$$3024 = V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!}$$

3024 combinaciones distintas para la caja de seguridad.

b) Si no se utiliza un dígito dos veces, encuentre el número total de combinaciones que comienzan con el 2. Determinar la probabilidad de este evento.



2 _ _ _

Para el segundo dígito se tienen 8 posibilidades: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9. Como no pueden repetirse, para el próximo hay 7 posibles dígitos, y para el tercero 6. Como estas condiciones se deben dar en simultáneo, entonces se tienen:

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 = V_8^3 = 8!/(8-3)!$ combinaciones distintas que comienzan en 2.

Luego, Si **D** = «la combinación comienza en 2», la probabilidad es :

$$P(\mathbf{D}) = \frac{336}{3024} = 0.11$$

Ejemplos:

5. El jefe de personal de una empresa desea seleccionar dos aspirantes de un grupo de cinco para cubrir dos puestos. Supongamos que los aspirantes no difieren en su preparación.

a) Encuentre el número de formas distintas de seleccionar dos aspirantes entre los cinco.

b) Si ahora consideramos que los aspirantes difieren en su preparación: 1 es el mejor, 2 es el segundo mejor, y así sucesivamente, 3, 4 y 5. Encuentre el número de formas de seleccionar exactamente uno de los dos mejores aspirantes mediante una selección de dos de los cinco. Después encuentre la probabilidad de este evento.

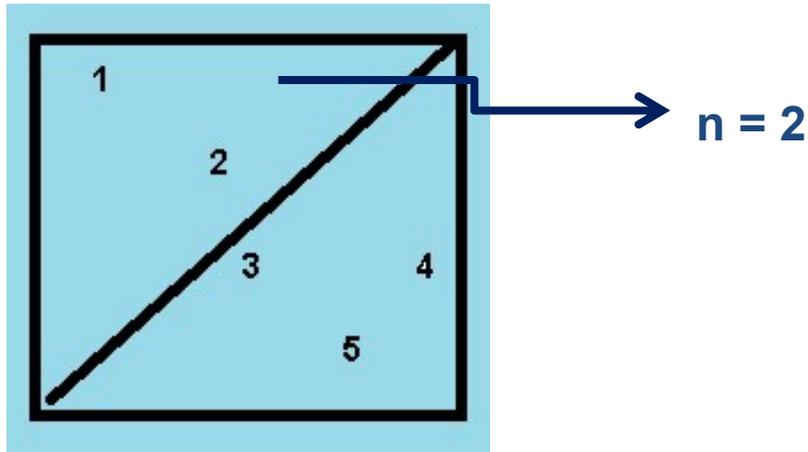
a) Las formas distintas de elegir 2 aspirantes cualesquiera entre los 5

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{V_{5,2}}{P_2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

b)

Sea A = "se escoge uno de los dos mejores aspirantes entre 5"

$N = 5$ aspirantes



Las formas distintas de elegir uno entre los dos mejores $\binom{2}{1} = 2$

Las formas distintas de elegir uno entre los 3 restantes $\binom{3}{1} = 3$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2! \cdot 3!}{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} \cdot \frac{6}{10} = 0.6$$

Ejemplos:

6. Se extraen 5 cartas de una baraja de 52 cartas. Calcular la probabilidad de extraer 4 ases.

A = «la carta es un as»

$$P(\mathbf{A}) = \frac{\binom{4}{4} \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{4!}{(4-4)! 1! (48-1)!}}{\frac{52!}{5! (52-5)!}} = \frac{48}{2598960} = 0.00002$$

Ejercicios

1. Un estudiante desea acomodar 8 libros, numerados del 1 al 8 en un anaquel.



- a) Determinar el número de formas distintas en que pueden hacerlo.
- b) Determinar el número de formas distintas en que puede hacerlo si 1, 2, y 3 deben permanecer siempre juntos y en ese orden. ¿cuál es la probabilidad de que esto ocurra?
- c) Si el 1, 2 y 3, deben permanecer juntos pero en cualquier orden ¿cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

Prode

2. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el prode? El juego se desarrollará sobre la base de 13 pronósticos (**L**, **V** ó **E**) de acuerdo a los partidos de fútbol de los días sábados y domingos.

| Sorteo n° 1700 - 13/09/2014 | | | | | |
|-----------------------------|---|------------------------|---|-------------------------|----|
| | L | Locales | E | Visitantes | V |
| 1 | ⚽ | BOCA JRS. | | RACING CLUB | |
| 2 | ⚽ | NEWEL'S O. BOYS | | OLIMPO (B.B) | |
| 3 | ⚽ | BELGRANO (CBA) | | VÉLEZ SARFIELD | |
| 4 | ⚽ | ATLETICO RAFAELA | | ESTUDIANTES DE LA PLATA | |
| 5 | | G. Y ESGRIMA (L.P) | | DEF. Y JUSTICIA | ⚽ |
| 6 | ⚽ | SAN LORENZO DE ALMAGRO | | DEP:GODOYCRUZA.T | |
| 7 | ⚽ | TIGRE | | ROSARIO CENTRAL | |
| 8 | | ARSENAL F.C. | | RIVER PLATE | ⚽ |
| 9 | ⚽ | INDEPENDIENTE | | QUILMES A.C. | |
| 10 | ⚽ | LANÚS | | BANFIELD | |
| 11 | | DOUGLAS HAIG | | NUEVA CHICAGO | ⚽ |
| 12 | | FERRO CARRIL OESTE | | ALDOSIVI | ⚽ |
| 13 | | SANTAMARINA (TANDIL) | ⚽ | HURACÁN | 58 |

TRADICIONAL PRIMER SORTEO

04 - 08 - 14 - 21 - 27 - 31



3. En el **Quini** se eligen 6 números del **00** al **45**, ambos inclusive.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar los 6 números?

b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 5 números?

c) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 4 números?

d) ¿Cuál es la probabilidad de no acertar ninguno?

$$P(\text{acertar } 6) = \frac{\binom{6}{6} \binom{40}{0}}{\binom{46}{6}} = 0.00000011$$

$$P(\text{acertar } 5) = \frac{\binom{6}{5} \binom{40}{1}}{\binom{46}{6}} = 0.000026$$

$$P(\text{acertar } 4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{40}{2}}{\binom{46}{6}} = 0.0012$$

$$P(\text{no acertar ninguno}) = \frac{\binom{6}{0} \binom{40}{6}}{\binom{46}{6}} = 0.4098$$

Calculo de probabilidad

3. Noción subjetiva de probabilidad



Cuando no se tienen datos para ningún tipo de cálculo, ni posibilidad de efectuar repetidamente el experimento, se recurre a un experto, quien de acuerdo a su buen saber y entender estimará la probabilidad de que ocurra ese evento.

Ejemplos:

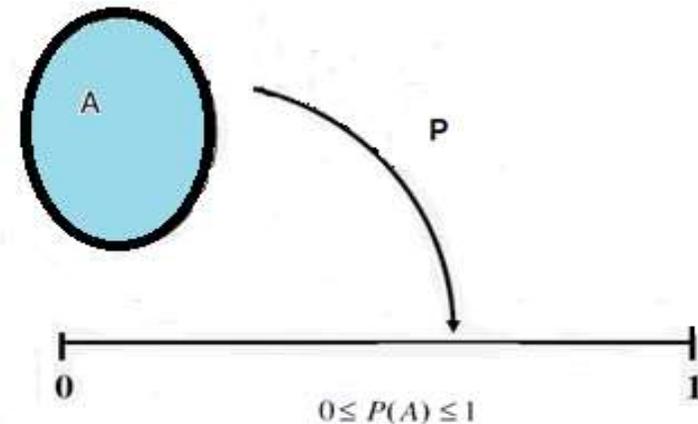
- Calcular la probabilidad de que un club de fútbol salga campeón.
- Calcular la probabilidad de que haya una pandemia.
- Calcular la probabilidad de que el precio de las acciones de una compañía se incremente en dos años.
- Calcular la probabilidad de que haya vida en Marte.

Definición Axiomática de Probabilidad

Dado un experimento aleatorio E y Ω , su espacio muestral asociado, a cada evento A se le asociará un número real, que se notará $P(A)$ y que se llamará **probabilidad del evento A** . Esta asignación debe satisfacer los siguientes axiomas:

A1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \Omega$

A2) $P(\Omega) = 1$



A3) Para toda sucesión de eventos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$, ie, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, se verifica que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

IMPORTANTE!!!!!!



Independientemente de que noción de probabilidad se utilice para el cálculo, siempre se deberán cumplir los tres axiomas mencionados.

Propiedades de la Probabilidad

(se desprenden de los axiomas)

1) $P(\emptyset) = 0$.

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

3) Dados los eventos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(Regla de la adición).

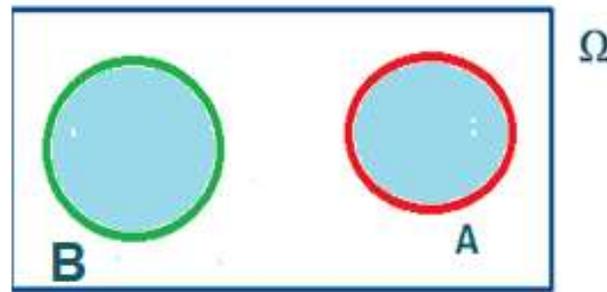
4) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

5) $P(A^c) = 1 - P(A)$, para todo suceso A.

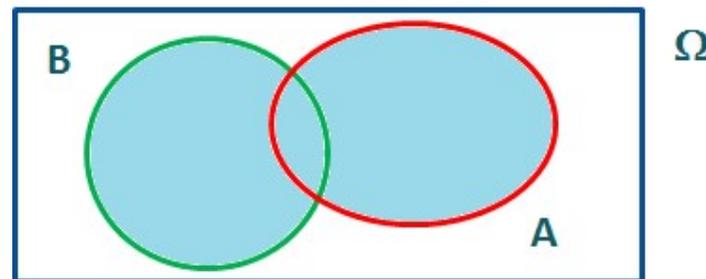
6) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Propiedades de la Probabilidad

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.

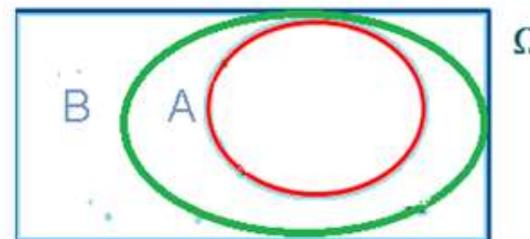


3) Dados los eventos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

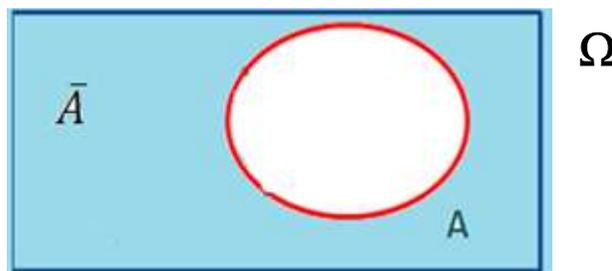


Propiedades de la Probabilidad

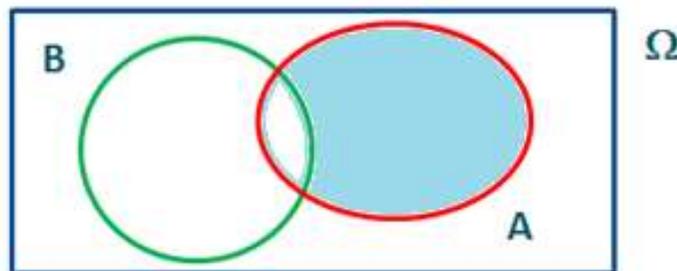
4) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.



5) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, para todo suceso A.



6) $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.



Ejemplo 1:

Las compañías de tarjetas de crédito han hecho una campaña para atraer nuevas cuentas de estudiantes universitarios. Se muestrearon **210** estudiantes de una universidad local y se los clasificó según su sexo y si disponen o no de una tarjeta de crédito bancaria. La información obtenida se resume en la siguiente tabla:

| Sexo | | | |
|--------------------|-----------|------------|-------|
| Tarjeta de crédito | Mujer (M) | Hombre (H) | Total |
| Si (S) | 60 | 75 | 135 |
| No (N) | 25 | 50 | 75 |
| Total | 85 | 125 | 210 |

Si se selecciona **un estudiante al azar**, ¿Cuál es la **probabilidad estimada** de que:

- 1) el estudiante seleccionado tenga tarjeta de crédito?
- 2) el estudiante sea hombre y tenga tarjeta crédito?
- 3) el estudiante sea mujer o tenga tarjeta crédito?
- 4) el estudiante seleccionado no tenga tarjeta crédito ?

| sexo | | | |
|--------------------|-----------|------------|------------|
| Tarjeta de crédito | Mujer (M) | Hombre (H) | Total |
| Si (S) | 60 | 75 | 135 |
| No (N) | 25 | 50 | 75 |
| Total | 85 | 125 | 210 |



Si se selecciona **un estudiante al azar**, ¿Cuál es la **probabilidad estimada** de que:

1) el estudiante seleccionado tenga tarjeta de crédito?

Se define el evento: **S**=« el estudiante tiene tarjeta de crédito»

$$P(S) \cong \frac{135}{210} = 0.6429$$

El 64.29% de los estudiantes poseen tarjeta de crédito (ó la probabilidad estimada de que un estudiante tenga crédito es 0.6429).

2) el estudiante seleccionado sea hombre y tenga tarjeta crédito?

Se define el evento: **H**=« el estudiante es hombre» $P(H \cap S) \cong \frac{75}{210} = 0.3571$

El 35.71% de los estudiantes son hombres que poseen tarjeta de crédito (ó la probabilidad estimada de que un estudiante sea hombre y tenga tarjeta de crédito es 0.3571).

| sexo | | | |
|--------------------|-----------|------------|------------|
| Tarjeta de crédito | Mujer (M) | Hombre (H) | Total |
| Si (S) | 60 | 75 | 135 |
| No (N) | 25 | 50 | 75 |
| Total | 85 | 125 | 210 |

Si se selecciona un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad estimada de que:

3) el estudiante sea mujer o tenga tarjeta crédito?

$$\begin{aligned}
 P(M \text{ ó } S) &= P(M \cup S) \\
 &= P(M) + P(S) - P(M \cap S) \cong \frac{85}{210} + \frac{135}{210} - \frac{60}{210} = \frac{160}{210} = 0.7619
 \end{aligned}$$

El 76.19% de los estudiantes son mujeres o poseen tarjeta de crédito (ó la probabilidad estimada de que un estudiante sea mujer o tenga crédito es 0.7619).

4) el estudiante seleccionado no tenga tarjeta crédito?

$$P(N) = P(\bar{S}) = 1 - P(S) \cong 1 - \frac{135}{210} = 0.3571$$

El 35.71% de los estudiantes no poseen tarjeta de crédito (ó la probabilidad estimada de que un estudiante no tenga crédito es 0.3571).

Ejemplo 2:

Un nuevo virus informático puede entrar en el sistema a través de correo electrónico o a través de Internet. El 30% de las veces este virus entra a través del correo electrónico. El 40% de las veces su recepción es a través de Internet. Además, el virus entra en el sistema a través del correo electrónico o de Internet con una probabilidad de 0.55.



Hallar:

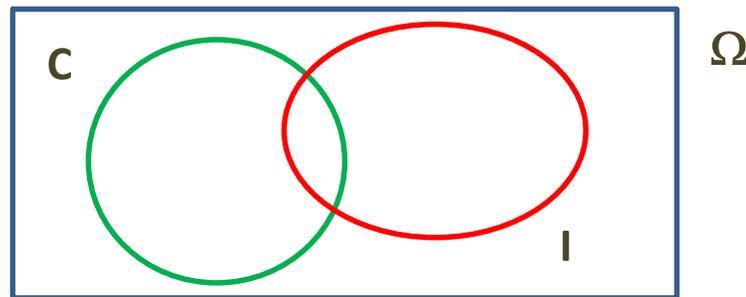
- la probabilidad de que el virus entre en el sistema de por ambas vías.
- la probabilidad de que el virus ingrese al sistema solamente a través de internet.
- no entre al sistema en absoluto.

Se definen los eventos:

C=«virus informático puede entrar en el sistema a través de correo electrónico»

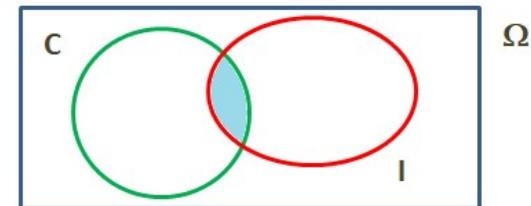
I = «virus informático puede entrar en el sistema a través de a través de Internet»

Sabemos que : $P(C) = 0.30$, $P(I) = 0.40$ y $P(C \cup I) = 0.55$



a) la probabilidad de que el virus entre en el sistema de por ambas vías.

$$P(C \text{ e } I) = P(C \cap I) = ?$$



$$0.55 = P(C \cup I) = P(C) + P(I) - P(C \cap I) = 0.30 + 0.40 - P(C \cap I)$$

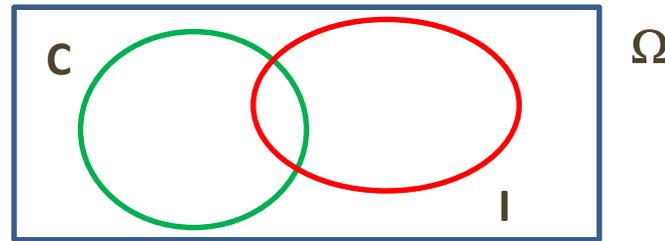
$$P(C \cap I) = 0.15$$

Se definen los eventos:

C=«virus informático puede entrar en el sistema a través de correo electrónico»

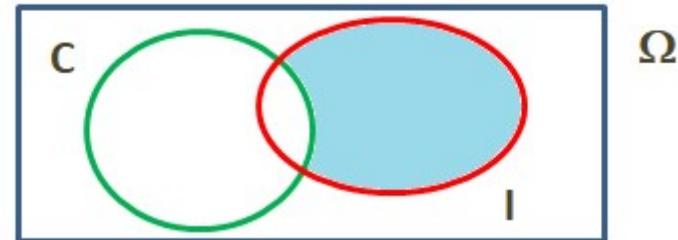
I = «virus informático puede entrar en el sistema a través de a través de Internet»

Datos: $P(C) = 0.30$, $P(I) = 0.40$ y $P(C \cup I) = 0.55$



b) la probabilidad de que el virus ingrese al sistema solamente a través de internet.

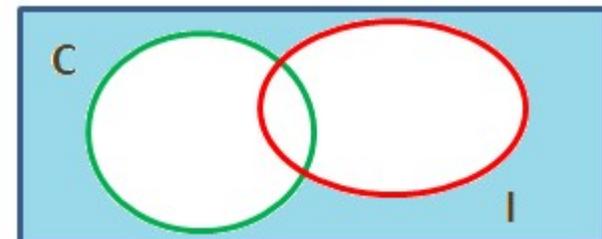
$$\begin{aligned} P(I \cap \bar{C}) &= P(I) - P(C \cap I) \\ &= 0.40 - 0.15 = 0.25 \end{aligned}$$



c) no entre al sistema en absoluto.

 **Leyes de De Morgan**

$$P(\bar{I} \cap \bar{C}) = P(\overline{I \cup C}) = 1 - 0.55 = 0.45$$



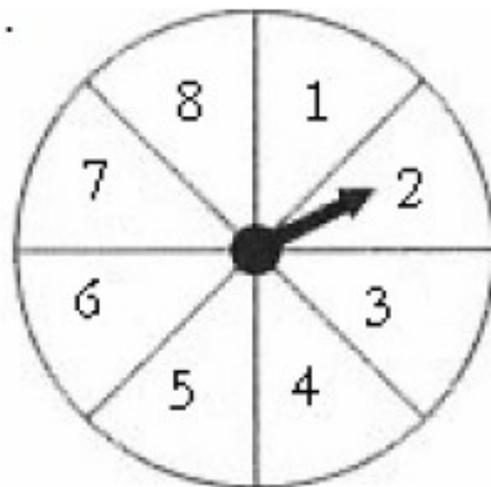
Ejercicios

1. Durante el año anterior, las ventas semanales en Geeks Computación han sido “bajas” durante 16 semanas, “considerables” durante 27 semanas y “altas” el resto de las semanas. Determinar la probabilidad estimada de que esta semana las ventas sean:
 - a. Considerables.
 - b. Bajas.
 - c. Altas.
 - d. por lo menos considerables.

2. Un experimento tiene dos únicos eventos mutuamente excluyentes A y B, donde A es 5 veces más probable que B. Determinar la $P(A)$ y $P(B)$.

3. Los dirigentes de un sindicato afirman que el 60% de los trabajadores de una fábrica pertenecen al sindicato. El 90 % de los trabajadores gana más de \$100 por hora; y el 40 % pertenece al sindicato y gana más de \$100 por hora. ¿Son creíbles estos porcentaje? Explicar.

4. Se hace girar la flecha de la ruleta una vez, si la probabilidad de seleccionar alguna línea divisoria es despreciable, la probabilidad de obtener un número mayor que 4 es:



5. Juan y Luis están solicitando ser admitidos en una universidad. La probabilidad de que Juan sea admitido es 0.7 y la probabilidad de que Luis sea admitido es 0.6. La probabilidad de que ambos sean admitidos es 0.45.

- a. ¿Cuál es la probabilidad de que solamente Juan sea admitido?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea admitido?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos sea admitido?