Nombre y Apellido:

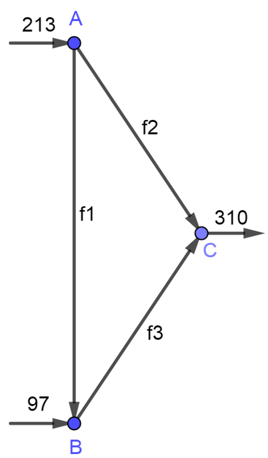
Primer Parcial de Álgebra y Geometría (8 de febrero de 2022)

1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 6x - 2y - 4z = 14 \\ -5x + 4y - \lambda z = -15 \end{cases}$

   (a) Utilizando el teorema de Rouché-Frobenius, analizar la compatibilidad del sistema para los distintos valores reales del parámetro λ.

   (b) Elegir, si es posible, un valor de λ para el cual el sistema sea compatible indeterminado y hallar la solución general del mismo.

2) Considerar el siguiente diagrama que representa una red de tuberías por donde circula cierto tipo de fluido. La dirección y sentido del flujo en cada tramo de la tubería se indica con flechas etiquetadas con la cantidad de metros cúbicos que fluyen por hora.



Sabiendo que se verifica la Ley de Conservación del Flujo que establece que " en cada nodo, el flujo que entra es igual al flujo que sale", asumiendo que no hay pérdidas entre los nodos de la red y que ésta no ofrece resistencia al paso del fluido:

   (a) Plantear la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales, definiendo previamente las variables que intervienen.

   (b) Calcular los flujos posibles entre cada par de nodos indicando en cada caso sus valores mínimos y máximos.

   (c) ¿Es posible cerrar el tramo que une los nodos A y B?

3) Dadas las matrices $A, B, C, D, E \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $A = 3B + C - 3A$, $D = 2A + B - 5C$ y $E = A - 7D$. Escribir, si es posible, a la matriz E como combinación lineal de las matrices B y C.

4) Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e indique $[A]_{\mathcal{B}}$, siendo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

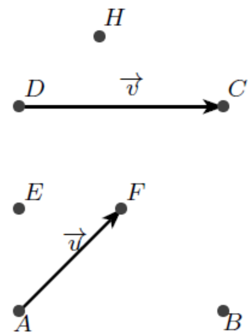
5) Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

   a) $\left((A.X)^T + 2B\right)^T = 5B^{-1}$ siendo A y B matrices inversibles tales que $B^T.B = I_2$ y $(B.A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   b) $E.Y + C = F + 3Y$ siendo $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

6) Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ vectores no nulos de E_2 que verifican $3(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{b} = 5\overrightarrow{c}$. ¿Es el conjunto $\{\overrightarrow{c}\ ,\ \overrightarrow{a}\}$ un sistema de generadores de E_2? Justificar su respuesta.

7) En la figura, los puntos A, B, C y D son los vértices de un cuadrado de centro F y E es el punto medio del segmento $\overline{AD}$.



a) Indicar verdadero o falso en las siguientes afirmaciones.

i. $\overrightarrow{AE} \in \overline{\left\{\overrightarrow{BC}\right\}}$.

ii. $\left\{\overrightarrow{AF}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right\}$ es una base de E_2.

iii. $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

b) Sea $B = \{\overrightarrow{u}\ ,\ 2\overrightarrow{v}\}$. Representar gráficamente: $[\overrightarrow{a}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8) Sean $\overrightarrow{s} = (-2, 1), B(2, 2)$ y $C(4, -5)$.

a) Hallar el extremo del vector $\overrightarrow{s}$ sabiendo que su origen es el punto C.

b) Escribir, si es posible, el vector $\overrightarrow{BC}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{s}$ y $\overrightarrow{r} = 3\breve{\imath} + 2\left\langle \overrightarrow{s}, \breve{\jmath} \right\rangle \overrightarrow{s}$.

9) Hallar el módulo de $\overrightarrow{a}$ sabiendo que $\left\langle \overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \right\rangle + \langle \overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{a} \rangle = 6\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ y que $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = 9$.

10) a) Indicar una base B $B.O.N.$ de $\mathbb{R}^2$ que contenga a un vector paralelo al vector $\overrightarrow{a} = (2, -3)$. Dibujar el sistema de coordenadas (O, XY) asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y en el mismo gráfico el sistema $(O, X'Y')$ asociado a la base B hallada. (Explicar los pasos de la construcción).

b) Hallar las componentes del vector $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ en la base B hallada. Graficar dicho vector.

Nota: Los ejercicios 1) y 2) corresponden al tema Sistemas de ecuaciones lineales; los ejercicios 3), 4) y 5) al tema Matrices, los ejercicios 6) y 7) a vectores libres en el plano y los ejercicios 8), 9) y 10) a la algebrización de vectores del plano.