

Final de Matemática II-ARQ - (03 / 03 / 2022)

APELLIDO Y NOMBRE: <u>Arias Paloma</u>	NOTA:
Mail: <u>palo.arias.pa@gmail.com</u>	L.U.:

REALIZ EL EXAMEN EN TINTA.

1. Dados los puntos $P(-2, 3, 0)$, $Q(a - 1, 2a, a)$ y los vectores $\vec{u} = (4, -2, -4)$ y $\vec{v} = (0, -3, 2)$:

B (a) Si $\vec{w}$ es un vector de módulo 15, con origen en el punto P , y tal que tiene la misma dirección que $\vec{u}$ pero sentido contrario, ¿cuáles son las coordenadas de su extremo?

R⁺ (b) Determinar, en caso de existir, todos los valores de a de manera tal que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea igual a 3.

2. Sea $L : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Para cada uno de los siguientes casos hallar, en caso de existir, todos los valores de $k \in \mathbb{R}$, de manera tal que:

B (a) Sea paralela a la recta $\frac{x-1}{k} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{4}$.

B (b) Esté contenida en el plano $\pi : 2x + ky - z + 2k - 5 = 0$.

M Graficar la recta L y el plano π , justificando el procedimiento para realizarlo.

Observación: Si no existe ningún valor de k para que $L \subseteq \pi$, o no puede determinarlo, grafique el plano utilizando $k = 5$.

3. **B** Graficar la superficie $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, justificando el procedimiento. Graficar además, las trazas correspondientes a los planos $z = 1$ y $x = 0$. **M**

$$a = \frac{5}{2}$$

Seamos $a = \frac{5}{2}$ $\vec{w} = \vec{PR}$

$$\frac{5}{2} \cdot (-4, 2, 4) = (x+2, y-3, z)$$

$$\frac{5}{2} \cdot (-4) = x+2 \quad \frac{5}{2} \cdot 2 = y-3 \quad \frac{5}{2} \cdot 4 = z$$

$$-10-2 = x$$

$$-12 = x$$

$$5+3 = y$$

$$8 = y$$

$$10 = z$$

Las coordenadas del extremo son $R: (-12, 8, 10)$

1) $P(-2, 3, 0)$ $Q(a-1, 2a, a)$ $\vec{u} = (4, -2, -4)$
 $\vec{v} = (0, -3, 2)$

a) $\|\vec{w}\| = 15$

$\vec{w} = \vec{PR} \rightarrow P: (-2, 3, 0) \quad R: (x, y, z)$

$w = (x - (-2), y - 3, z - 0) = (x + 2, y - 3, z)$

Si $\vec{w}$ tiene la misma dirección q' $\vec{u}$, pero sentido contrario, entonces $\vec{w} = a(-4, 2, 4)$ $a > 0$

$\|\vec{w}\| = 15$

$\sqrt{(-4a)^2 + (2a)^2 + (4a)^2} = 15$

$16a^2 + 4a^2 + 16a^2 = 15^2$

$36a^2 = 225$

$a^2 = \frac{225}{36}$

$|a| = \sqrt{\frac{25}{4}}$

$a = \frac{5}{2}$

Subimos q' $\vec{w} = \vec{PR}$

b) $\frac{5}{2} \cdot (-4, 2, 4) = (x + 2, y - 3, z)$

$\frac{5}{2} \cdot -4 = x + 2$

$-10 - 2 = x$
 $-12 = x$

$\frac{5}{2} \cdot 2 = y - 3$

$5 + 3 = y$
 $8 = y$

$\frac{5}{2} \cdot 4 = z$

$10 = z$

las coordenadas del extremo son $R: (-12, 8, 10)$

1)

12) Eschreiben die Punkte des geraden Kegel K mit $h=1$ und $r=1$ in der Form $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (x_1, y_1, z_1) + s \cdot (x_2, y_2, z_2)$

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1] \}$$

Wir wählen die Punkte $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 0, 1)$ und $P_3(0, 1, 1)$ als Basisvektoren für den Kegel. Die Parameter t und s sind durch die Bedingung $t^2 + s^2 \leq z^2$ eingeschränkt.

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1] \}$$

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1] \}$$

2) $L: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \vec{d}_L = (4, 1, 2)$

a) $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{4}$

$L \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_L \parallel \vec{d}_{L_2}$

$L_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t+2 \\ z = 4t \end{cases}, \quad \vec{d}_{L_2} = (1, -2, 4)$

Para q $\vec{d}_L \parallel \vec{d}_{L_2}$: $\vec{d}_{L_2} = \vec{d}_L \cdot \alpha$

$(1, -2, 4) = (4, 1, 2) \cdot \alpha$

$\begin{matrix} 1 = 4\alpha & -2 = 1\alpha & 4 = 2\alpha \\ \alpha = 0.25 & \alpha = -2 & \frac{4}{2} = 2 \\ \boxed{\alpha = 0.25} & & \alpha = 2 \end{matrix}$

b) $\Pi: 2x + 4y - z + 2x - 5 = 0 \quad \vec{n}_\Pi = (2, 4, -1)$

$\Pi \cap L: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \\ \Pi: 2x + 4y - z + 2x - 5 = 0 \end{cases}$

substituímos

$\Pi: 2 \cdot (3+4t) + 4 \cdot (2+t) - (1+2t) + 2x - 5 = 0$

$6 + 8t + 8 + 4t - 1 - 2t + 2x - 5 = 0$

$4x - 2t = 0$

$x \cdot (2-t) = 0$

Para q $L \subset \Pi$, $\vec{d}_L \perp \vec{n}_\Pi$

$\langle (4, 1, 2), (2, 4, -1) \rangle = 0$
 $8 + 4 - 2 = 10 \neq 0$

$2 - 4t - 2 = 0$
 $-4t = 0$
 $t = 0$

$$* k \cdot (4-t) = 0$$

$$0 \cdot (4-t) = 0$$

$$0 = 0$$

✓ confirmo g' está contenida

$$\Pi: 2x + 0y - z + 20 - 5 = 0$$

$$2x - z - 5 = 0$$

$$\text{Eje } x: y = z = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$P: (5/2, 0, 0)$$

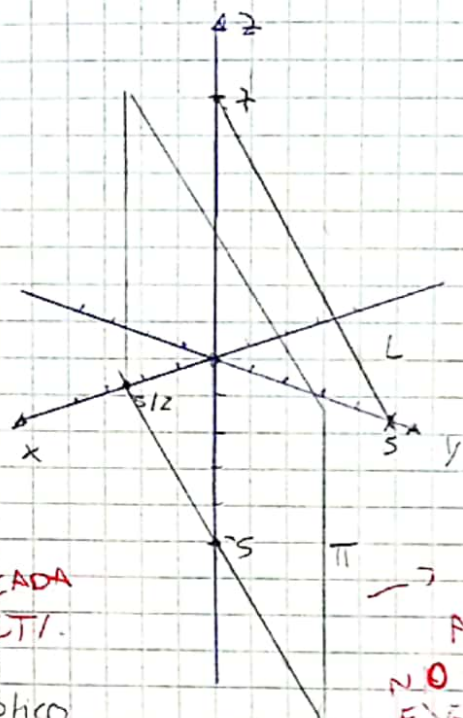
$$\text{Eje } z: x = y = 0$$

$$-z - 5 = 0$$

$$-z = 5$$

$$z = -5$$

$$P(0, 0, -5)$$



$$\text{En } t = -3$$

L:

$$x = 3 + 3 \rightarrow x = 0$$

$$y = 2 - (-3) \rightarrow y = 5$$

$$z = 2 + 2 \cdot 3 \rightarrow z = 7$$

→ A LA
GRAFICADA
LA RECTA.

→ PARALELO
AL EJE Y,
NO AL
EJE Z

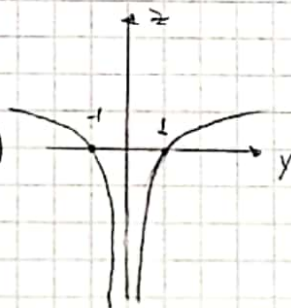
$$(3) \quad z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{semicono circular}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$\text{En } x = 0$$

$$z = \ln(\sqrt{y^2})$$

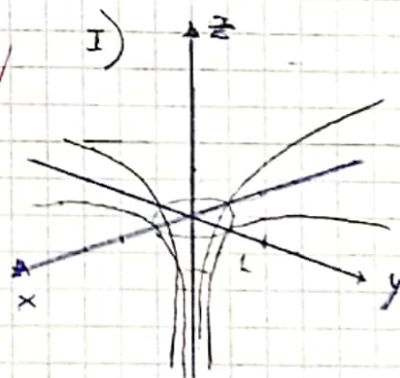
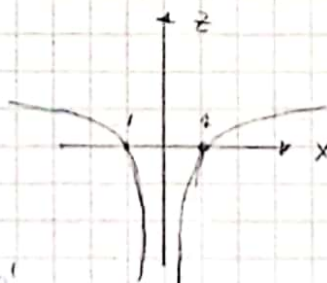
$$y \in \mathbb{R}$$



$$\text{En } y = 0$$

$$z = \ln(\sqrt{x^2})$$

$$x \in \mathbb{R}$$



- Las 4 curvas g' vemos en el gráfico I) van a ∞ formando arcos paralelos a xy . El radio de cada una va a ∞ creciendo a medida g' z crece. Esto se debe a g' z está dada en función de $\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$.

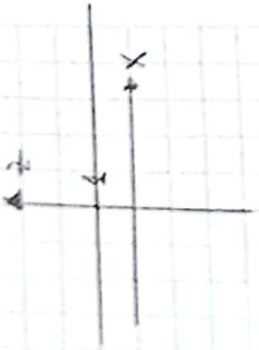
NOTA

$x = 4$

(5)

$f_1: x = 0$

$f_2: y = 0$

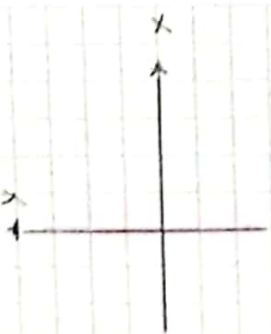
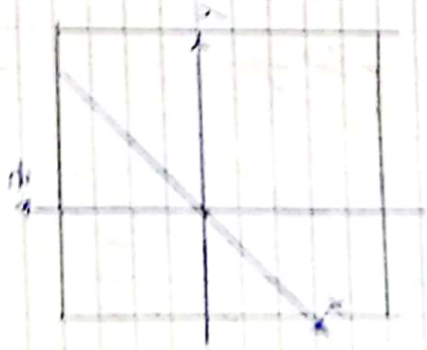


(2)

$x = 2$

$f_1: x = 0$

$f_2: y = 0$



2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

4. Hallar la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^4 + 43}{24x}$ en el intervalo $[2, 4]$.

Paloma
Arias

5. Hallar, en caso de existir, la(s) intersección(es) de la curva $\vec{r}(t) = (\cos(t), 3\cos(t), \sin(t))$ con el plano $x + z = 0$.

6. Dados los siguientes puntos en el sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$P_1\left(3, \frac{\pi}{4}, 1\right); P_2\left(3, 0, -6\right)$$

(a) encuentre las coordenadas rectangulares.

(b) encuentre las coordenadas esféricas.

$$f'(x) = \frac{24x}{x^4 + 43}$$

$$f(x) = 3 \cdot \frac{(x^4 + 43)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 43}{x}$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3x^4 - 43}{x}\right)^2} \cdot dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{9x^8 - 246x^4 + 1849}{x^2}} \cdot dx$$

$$L = \int_2^4 \sqrt{\frac{x^2 + 9x^8 - 246x^4 + 1849}{x^2}} \cdot dx$$

(1)

$$f = \frac{x^4 + 4x}{24x} \quad [2,4]$$

$$L: \int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

$$f(x) = \frac{x^4 + 4x}{24x} \quad (x^4 + 4x)' = 4x^3 + 4$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 4}{24x}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 4}{24x} = \frac{4x^3}{24x} + \frac{4}{24x} = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6x}$$

$$f''(x) = \frac{2x}{6} - \frac{1}{6x^2} = \frac{x}{3} - \frac{1}{6x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6x}$$

$$L: \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{1}{6x}\right)^2} \, dx$$

$$L: \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{x^4 + 2x + 1}{36x^2}} \, dx$$

$$L: \int_2^4 \sqrt{\frac{x^4 + 2x + 1 + 36x^2}{36x^2}} \, dx$$

5

Questão 2

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), 2\cos(t), \sin(t)) \rightarrow \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = 2\cos(t) \\ z = \sin(t) \end{cases}$$

Plano $x + z = 0$

$$\begin{aligned} \sin(t) + \sin(t) &= 0 \\ 2\sin(t) &= 0 \\ \sin(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(t) &= 0, \\ t &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) \rightarrow \begin{cases} x = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ y = 2\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ z = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \rightarrow P_1(1, 0, 1)$$

Vou intersectar em $(0, 0, 0)$ e $(0, -2, 0)$

6

$$P_1: (\frac{3}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \quad P_2: (3, 0, -\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} a) P_2: x &= r \cdot \cos(\theta) & y &= r \cdot \sin(\theta) & z &= \frac{\pi}{2} \\ x &= 3 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) & y &= 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) & z &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\sqrt{2}}{2} & y &= \frac{3\sqrt{2}}{2} & z &= \frac{\pi}{2} \\ P_2 &= (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2: x &= r \cdot \cos(\theta) & y &= r \cdot \sin(\theta) & z &= -\frac{\pi}{2} \\ x &= 3 \cdot \cos(0) & y &= 3 \cdot \sin(0) & z &= -\frac{\pi}{2} \\ x &= 3 & y &= 0 & z &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$P_2(3, 0, -\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{aligned} b) P_4: p &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ p &= \sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\pi}{2})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arccos \frac{z}{p} & \theta &= 0 \\ \phi &= \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} & \theta &= \frac{\pi}{4} \\ \phi &= \frac{\pi}{4} & \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$P_4(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

$$p = \sqrt{10}$$

$$P_2: \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad /$$

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-6)^2}$$

$$\rho = 3\sqrt{5} \quad /$$

$$\theta = 0 \quad /$$

$$\theta = 0$$

$$\phi = \arccos \frac{z}{\rho}$$

$$\phi = \arccos \frac{-6}{3\sqrt{5}}$$

$$\phi = 2,47$$

$$P_2: (3\sqrt{5}, 0, 2,47) \quad \phi$$