

# Unidad II

## Parte II

**Definición de Variable Aleatoria. Variable Aleatoria Discreta. Distribución de probabilidad. Función de distribución acumulada. Valor Esperado, Varianza y Desvío estándar de una Variable Aleatoria Discreta. Distribución Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, Hipergeométrica y Poisson.**

# Valor Esperado de una v.a. discreta

## Ejemplo 1

Los clientes de una empresa proveedora de servicios de Televisión Satelital de cierta zona, pueden optar por contratar de 1 a 5 paquetes de señales (el abono básico consiste en un solo paquete y cada uno de los otros incluye un grupo de señales temáticas o premium). La distribución de probabilidad del *número de paquetes  $X$  contratados por un cliente* es:

$X$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075



El gerente de la empresa está interesado en el **número promedio de paquetes contratados por un cliente**, ie, el **valor promedio de  $X$**  en la población.

Cuando desean conocer el **promedio o media** entre las calificaciones obtenidas en los  **finales**  rendidos hasta el momento, **¿cómo lo calculan?**

Supongamos que hasta el momento rindieron **7 finales** y obtuvieron las siguientes notas:

**8      9      8      9      9      10      9**

El **promedio** se determina:

$$\text{Media estimada} = \frac{8+8+9+9+9+9+10}{7} = \frac{8*2+9*4+10*1}{7}$$


$$2/7 \approx P(X=8)$$


$$4/7 \approx P(X=9)$$


$$1/7 \approx P(X=10)$$

$$= 8 * \frac{2}{7} + 9 * \frac{4}{7} + 10 * \frac{1}{7}$$

$$= \mathbf{8.86}$$

**X** = «calificación de un alumno en un final de su carrera» (en puntos).

Si la carrera se concluyera con la aprobación de **7 finales**, el **verdadero promedio o media o esperanza de X** o, también llamado **valor esperado de X**, se calcularía:

**X** = «calificación de un alumno en un final de su carrera» (*en puntos*).

$$\mathbf{E(X)} = 8 * P(X=8) + 9 * P(X=9) + 10 * P(X=10) = 8.86$$

La **calificación promedio** de un alumno en un final de su carrera es de **8.9 pts.**

# Valor Esperado de una v.a. discreta

$$\mathbf{E(X)} = 1 * P(X=1) + 2 * P(X=2) + 3 * P(X=3) + 4 * P(X=4) + 5 * P(X=5) = \mathbf{2.2}$$

**Interpretación:** El cliente, en promedio, contrata aprox. **2** paquetes.

Para calcular el  
valor promedio de  
X en la población



Conocer los **valores posibles** de **X** y sus respectivas **probabilidades**

**El valor promedio, valor esperado o media de X** es un promedio ponderado de los posibles valores 1, 2, ..., 5, donde los **pesos** son las **probabilidades** de esos valores.

## Def.

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta con rango  $R_X$  y función de probabilidad puntual  $p_X(x)$ , la **esperanza** o **el valor esperado** de  $X$  se define:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x p_X(x) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x)$$

**Interpretación de la esperanza:** Si sobre cada valor posible de  $X$ ,  $x$ , se coloca una masa  $p_X(x)$ , el punto de equilibrio del sistema es  **$E(X)$** . En este sentido, se puede decir que  **$E(X)$**  es una medida del “**centro**” de la distribución. Es el centro de masa del sistema.

## Ejemplo 2

Un usuario de una computadora intenta recordar su contraseña. Él sabe que puede ser una de los 4 posibles contraseñas que tiene anotadas. Prueba sus contraseñas hasta que encuentra la correcta.

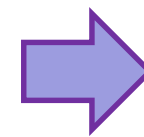
Determinar el **número promedio** de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta.



Se define la v.a.

**X** = “*Nº de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta*”

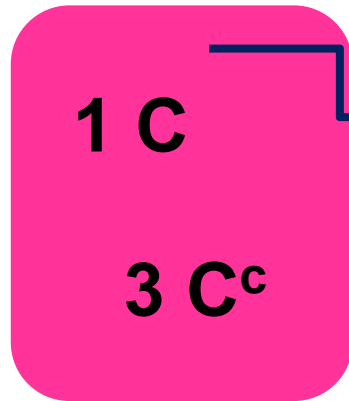
Queremos hallar el **número promedio** de **X**



**E(X)**

Sea **X** = «N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta» una v.a.» Definimos el evento **C** = «La contraseña es la correcta»

**N = 4 contraseñas**



$$\Omega = \{C, (C^c, C), (C^c, C^c, C), (C^c, C^c, C^c, C)\}$$

**Finito.**

luego: **R<sub>x</sub>** = {0,1,2,3}

$$P(X = 0) = P(C) = \mathbf{1/4},$$

$$P(X = 1) = P((C_1^c, C_2)) = P(C_1^c \cap C_2) \cdot$$

$$= P(C_1^c) \cdot P(C_2 / C_1^c)$$

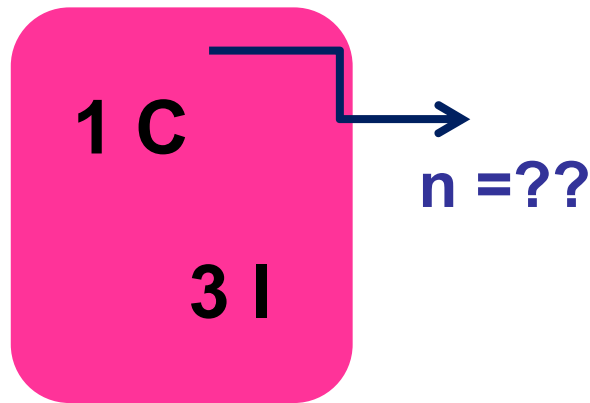
$$= 3/4 \cdot 1/3 = \mathbf{1/4},$$

Ley del producto de eventos **NO** independientes



Sea **X** = «N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta» una v.a.» Definimos el evento **C** = «La contraseña es la correcta»

**N = 4 contraseñas**



$$\Omega = \{C, (C^c, C), (C^c, C^c, C), (C^c, C^c, C^c, C)\}$$

**Finito.**

luego:  $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

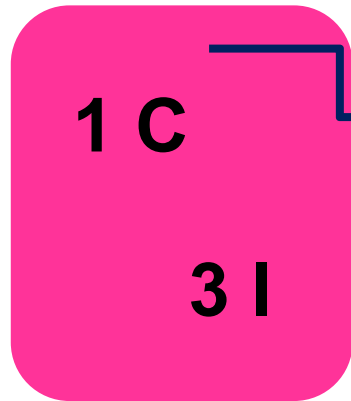
Ley del producto de eventos **NO** independientes

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P((C_1^c, C_2^c, C_3)) = P(C_1^c \cap C_2^c \cap C_3) \\ &= P(C_1^c) \cdot P(C_2^c / C_1^c) \cdot P(C_3 / C_1^c \cap C_2^c) \\ &= 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = \mathbf{1/4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P((C_1^c, C_2^c, C_3^c, C_4)) = P(C_1^c \cap C_2^c \cap C_3^c \cap C_4) \\ &= P(C_1^c) \cdot P(C_2^c / C_1^c) \cdot P(C_3^c / C_1^c \cap C_2^c) \cdot P(C_4 / C_1^c \cap C_2^c \cap C_3^c) \\ &= 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1/1 = \mathbf{1/4} \end{aligned}$$

Sea **X** = «N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta» una v.a.»

**N = 4 contraseñas**



$$\Omega = \{C, (C^c, C), (C^c, C^c, C), (C^c, C^c, C^c, C)\}$$

**Finito.**

luego:  **$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$**

$$P(X = 0) = \frac{1}{4},$$

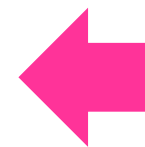
$$P(X = 2) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{4}.$$

**La función de distribución de probabilidad es**

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.25	0.25	0.25	0.25



**Esta Distribución  
se denomina  
uniforme  
discreta**

**X** = «N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta» una v.a.»

## Función de distribución de probabilidad de la v.a. **X**

<b>X</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>P(X = x)</b>	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>

El **número promedio** de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta es:

$$\mathbf{E(X)} = 0 * P(X=0) + 1 * P(X=1) + 2 * P(X=2) + 3 * P(X=3) = \mathbf{1.5}$$

Luego, **en promedio**, se deben probar con **aprox. 2** de contraseñas incorrectas para encontrar la correcta.

## Ejemplo 1

Teniendo en cuenta la v.a.:

$X$  = “*número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar*”, con función de distribución de probabilidad:

$X$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

Si el costo del servicio (en pesos),  $Y$ , es función del número de paquetes contratados, según la siguiente fórmula:

$$Y = 400 (X + 1)$$

¿Cuál es el valor esperado del **costo pagado por cliente**, es decir,  **$E(Y)$** ?

## Solución

**$X$**  = “*número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar*”, con función de distribución de probabilidad:

<b>X</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>P(X = x)</b>	<b>0.375</b>	<b>0.275</b>	<b>0.175</b>	<b>0.10</b>	<b>0.075</b>

**$Y$**  = “*costo del servicio (en pesos) por cliente*”,  $Y = 400 (X+1)$

$R_Y = \{ 800, 1200, 1600, 2000, 2400 \}$  recorrido de la v.a.  $Y$ .

<b>Y</b>	<b>800</b>	<b>1200</b>	<b>1600</b>	<b>2000</b>	<b>2400</b>
<b>P(Y = y)</b>	<b>0.375</b>	<b>0.275</b>	<b>0.175</b>	<b>0.100</b>	<b>0.075</b>

**El valor esperado del costo pagado por cliente, es**

$$E(Y) = 800 * 0.375 + 1200 * 0.275 + 1600 * 0.175 + 2000 * 0.100 + 2400 * 0.075 = 1290\$$$

**El costo promedio pagado por cliente es de 1290\$.**

## Proposición

Si la v.a.  $\mathbf{X}$  tiene función de probabilidad puntual  $P(X = x)$  para todo  $x \in \mathbf{R}_X$ , entonces la esperanza de cualquier función real  $h(X)$ , está dada por,

$$E(h(X)) = \mu_{h(X)} = \sum_{x \in \mathbf{R}_X} h(x) P(X = x)$$

## Propiedades de la esperanza

1. Sea  $X$  v.a. tal que  $X = k \Rightarrow E(X) = k$
2. Sea  $X$  v.a. y  $k$  un número real cualquiera tal que  $Y = X + k \Rightarrow E(Y) = E(X) + k$
3. Sea  $X$  v.a. y  $k$  un número real cualquiera tal que  $Y = kX \Rightarrow E(Y) = k E(X)$

## Ejemplo

Tomamos nuevamente la v.a. definida:

**Y** = "costo del servicio (en pesos) contratado por un cliente elegido al azar".

Dicha variable aleatoria es función del número de paquetes contratados por cliente,

$$Y = 400 (X + 1)$$

¿Cuál es el valor esperado del costo pagado por cliente, es decir, **E(Y)**?

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(400(X+1)) = 400 \cdot (E(X+1)) = 400 \cdot (E(X) + 1) = \\ &= 400 \cdot (2.225 + 1) = 400 \cdot 3.225 = \mathbf{1290 \$}. \end{aligned}$$

El costo promedio del servicio pagado por cliente es de **1290** \$.  
15

# Varianza de una v.a. discreta

La esperanza de una v.a.  $X$  determina el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, pero no proporciona información acerca de la **forma de la distribución**.

Las siguientes tablas y gráficos presentan tres distribuciones discretas de probabilidad que poseen el **mismo valor esperado**, sin embargo, difieren notablemente en la dispersión de sus valores:

$X$	1	2	3
$P(X = x)$	0.3	0.4	0.3

$Y$	0	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$Z$	2
$P(Z = z)$	1



# Varianza de una v.a. discreta

La esperanza de cada una de las v.a. es en efecto, 2 :

X	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.4	0.3

$$\mathbf{E(X)} = 1 * 0.3 + 2 * 0.4 + 3 * 0.3 = \mathbf{2}$$

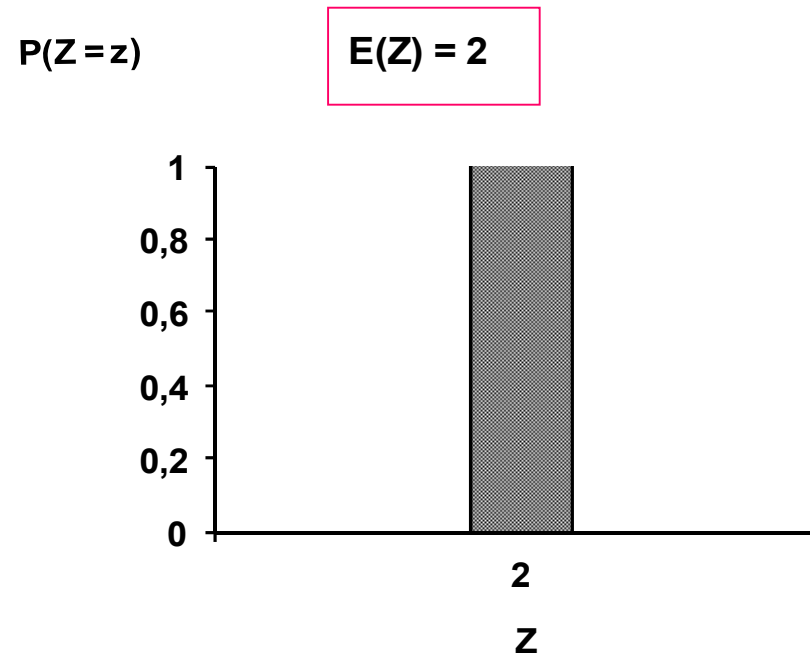
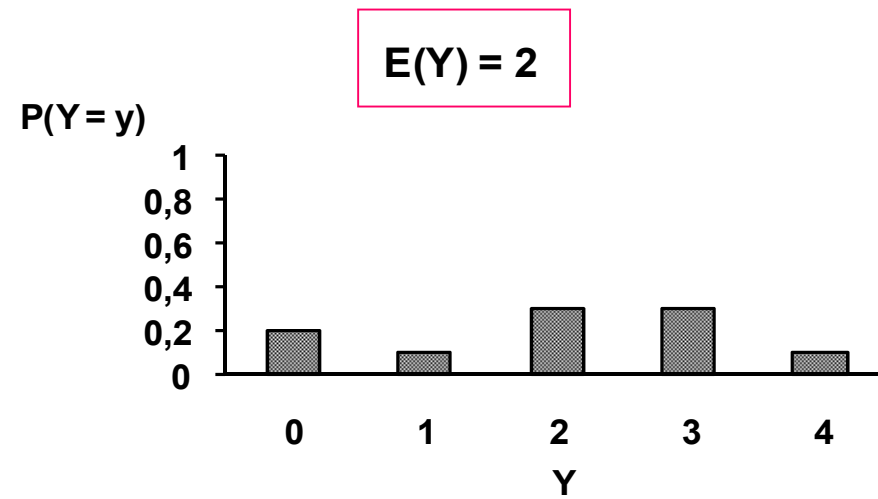
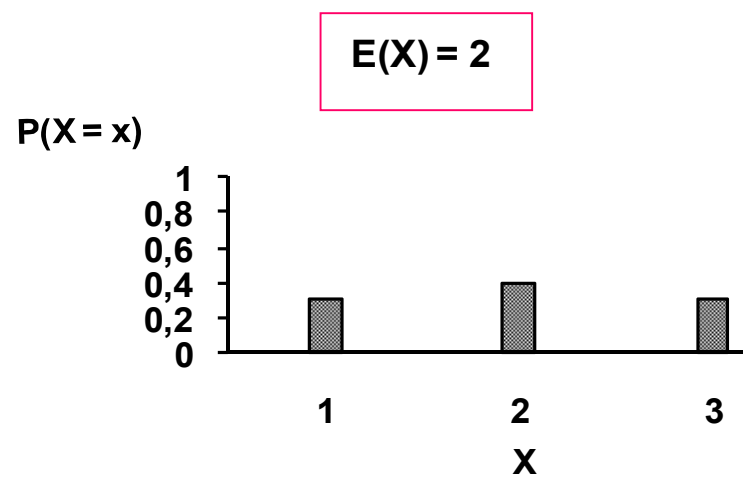
Y	0	1	2	3	4
P(Y = y)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$$\mathbf{E(Y)} = 0 * 0.2 + 1 * 0.1 + 2 * 0.3 + 3 * 0.3 + 4 * 0.1 = \mathbf{2}$$

Z	2
P(Z = z)	1

$$\mathbf{E(Z)} = 2 * 1 = \mathbf{2}$$





## Def.

Sea  $X$  una v.a. con función de probabilidad puntual  $P(X = x)$  y esperanza  $\mu_X$ , la **varianza** de  $X$ , que se denotará  **$V(X)$** ,  **$\sigma_X^2$**  ó  **$\sigma^2$** , es

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = E[(X - E(X))^2] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 P(X = x)$$

La **varianza** de  $X$ , representa la dispersión promedio de las distancias al cuadrado de los valores de la v.a respecto a su valor esperado.

Se prueba desarrollando el cuadrado y aplicando **propiedades** de la **esperanza**, que

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 P(X = x) - \left[ \sum_{x \in R_X} x P(X = x) \right]^2.$$

## Varianza de una v.a.

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma_X^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{x \in R_X} x^2 P(X = x) - \left[ \sum_{x \in R_X} x P(X = x) \right]^2. \end{aligned}$$

La **varianza** de  $X$ , representa la dispersión promedio de las distancias al cuadrado de los valores de la v.a respecto a su valor esperado.

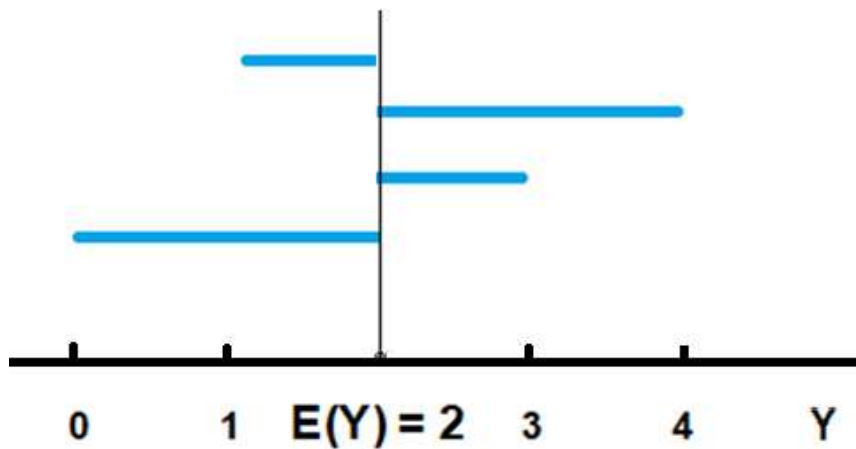
### Def.

Sea  $X$  una v.a. El **desvío estándar** de  $X$ , que se denotará,  $\sigma_X$  ó  $\sigma$ , es

$$\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$$

Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

# Varianza de una v.a.: Gráficamente



**Varianza de una v.a. X**

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[X^2] - [E(X)]^2$$

**Desvío estándar de una v.a. X**

$$\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$$



## **Observaciones!!!!**

- La **varianza** tiene importancia teórica, pero resulta difícil su interpretación porque las unidades de medición de la variable de interés están elevadas al cuadrado. En cambio, las unidades de medición del **desvío estándar** son las unidades de la variable. Por ello, que esta es la medida de dispersión más utilizada en la práctica.
- La **varianza** y el **desvío estándar** son valores no negativos.

## Ejemplo

Hallar la varianza y el desvío estándar de las tres v.a. presentadas anteriormente con esperanza igual a 2. Para ello se utilizará la expresión

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (1^2 * 0.3 + 2^2 * 0.4 + 3^2 * 0.3) - 2^2 = 4.6 - 4 = 0.6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 5.6 - 4 = 1.6$$

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 4 - 4 = 0.$$

Los valores que presentan una *mayor variabilidad* son los correspondientes a la variable **Y**.

**Hallar:**

**a)** la variabilidad del **número de paquetes de programas contratados** por un cliente seleccionado al azar, ie,  **$V(X)$** .

**b)** La variabilidad del **costo del servicio** (en pesos) **contratado por cliente**, ie,  **$V(Y)$** .



## Ejemplo

Sea la v.a.  $X$  = “número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar”, **con distribución de probabilidad:**

$X$	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

y la varianza es

$$V(X) = (1^2 \cdot 0.375 + 2^2 \cdot 0.275 + 3^2 \cdot 0.175 + 4^2 \cdot 0.100 + 5^2 \cdot 0.075) - (2.225)^2 = 6.525 - 4.950 = 1.57.$$

El desvío estándar es  $\sigma_X = \sqrt{1.57} = 1.25$

Las fluctuaciones promedio del número de paquetes de programas contratados por un cliente respecto al número medio paquetes contratados por cliente es de **1.25**.

25

## Propiedades de la varianza

1. Sea  $X$  v.a. tal que  $P(X = c) = 1 \Rightarrow V(X) = 0$ .
2. Sea  $X$  v.a. y  $k$  un número real cualquiera tal que  $Y = X + k \Rightarrow V(Y) = V(X)$ .
3. Sea  $X$  v.a. y  $k$  un número real cualquiera tal que  $Y = kX \Rightarrow V(Y) = k^2 V(X)$ .

## Ejemplo

Se definió anteriormente, la v.a.  $Y = \text{« el costo del servicio (en pesos) contratado por cliente»}$ ,  $Y = 400 (X + 1)$

su varianza,  $V(Y)$ , es

Por la **propiedad 3.** de varianza resulta:


$$V(Y) = V(400 (X+1)) = 400^2 V(X+1) = 160000 V(X+1)$$

y por la **propiedad 2.:**


$$V(Y) = 160000 V(X+1) = 160000 V(X) = 160000 \cdot 1.57 =$$

**251200\$<sup>2</sup>.**

# Ejercicios

**1.** El gerente de una gran tienda necesita determinar la distribución de probabilidad del número de clientes entre los próximos tres que ingresan a la tienda que hacen una compra. El 30% de los clientes realizan una compra.

Si se define la v.a.:

**X** = "*n° de clientes entre los próximos 3 que ingresen a la tienda*"

**a.** ¿Cuál es la probabilidad de que de los tres que ingresen a la tienda todos realicen una compra si se sabe que más de 1 lo hizo?

**b.** ¿Cual es el número promedio de clientes que realizan una compra entre los próximos tres que ingresan a la tienda ?

**c.** Hallar el desvío estándar del número de clientes entre los próximos tres que ingresan a la tienda que hacen una compra.

**2.** Una moneda está “cargada” y de este modo, la probabilidad de obtener una cara es el triple de obtener una seca. Si se realizan tres lanzamientos independientes de la moneda, determinar:

- a) La distribución de probabilidad de la v.a.  $X =$  “*N° total de caras obtenidas en 3 lanzamientos de la moneda*”.
- b) La probabilidad de obtener a los sumo 2 caras.
- c) El número promedio de caras obtenidas en 3 lanzamientos de la moneda.
- d) La varianza del número de caras obtenidas en 3 lanzamientos.
- e) La función de distribución acumulada de la v.a.  $X$ .

**3.** Un inversionista dispone de cierta cantidad de dinero para invertir. Tiene 3 alternativas posibles. En la siguiente se presentan las utilidades estimadas (en pesos) de cada alternativa de acuerdo con las distintas condiciones económicas:

Situac.\ Alternativa	A	B	C
La economía declina	500	-2000	-7000
No hay cambios	1000	2000	-1000
La economía se expande	2000	5000	18000

Silvina Pistonesi

En base a su experiencia, el inversionista asigna las siguientes probabilidades a cada situación económica: la probabilidad de que la economía decline es 0.3; de que no haya cambios es 0.5 y de que se expanda es 0.2. Determinar la mejor elección para el inversionista, atendiendo a las ganancias esperadas.