Final de Elementos de Álgebra y de Geometría (09/08/23) Profesor: J. M. Cornejo

APELLIDO Y NOMBRE:	NOTA:
CARRERA:	Leg.Nº:

1. En $\mathbb{R}^4$ consideremos S el subespacio $\overline{\{(8,3,1,5),(0,2,-1,3)\}}$.

   a) Escribir el subespacio S utilizando ecuaciones.

   b) Determinar los valores de a y b para que el vector $\vec{u} = (2, a, -3, -b)$ pertenezca al subespacio S.

2. a) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenga autovalores 1 y -1, de modo que $V_1 = \{(x, y, z) : \ 2x - y + z = 0\}$ y $V_{-1} = \{(-2z, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$. ¿Es T una transformación lineal diagonalizable? ¿Es T una transformación lineal simétrica?

   b) Sea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sea R la relación definida por:

   $$(x, y) \ R \ (u, v) \ \text{ si y sólo si } (x^2, y) = (u^2, v).$$

   Demostrar que R es una relación de equivalencia, calcular las clases de equivalencia y hallar el conjunto cociente.

3. a) Demostrar, aplicando el principio de inducción, que $n! \geq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.

   b) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a, b) = 1$ y $c|a$ entonces $(c, b) = 1$.

   c) Hallar el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   resulte inversible.

4. a) Demostrar usando propiedades, que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores tales que

   $$\| \vec{u} + 5\vec{v} \|^2 - 10 \cdot \| \vec{u} \| \cdot proy_{\vec{u}}\vec{v} = 26 \cdot \| \vec{u} \|^2, \quad \text{entonces } \ \| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|.$$

   b) Sean el plano $\pi : 2x + 2y - z = 0$ y el punto $P(-3, -5, 2)$. Hallar las coordenadas del punto Q simétrico de P con respecto a π.

5. a) Si

   $$P(X) = (X + i)^4 (X - i)^3 \left[X^4 - \left(\frac{1}{2} + i \right) X^3 - \left(2 - \frac{1}{2} i \right) X^2 + (1 + 2i) X - i \right]$$

   es un polinomio con coeficientes reales, hallar todas sus raíces y las respectivas multiplicidades.

   b) Hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tales que: $z^5 = (5i^{23} - 3i^{-23}) \cdot z^2$.

Indicar el número de hojas entregadas sin incluir el enunciado:... .... Firmar la última hoja.

NOTA: Las respuestas que no cuenten con la debida justificación no se calificarán.