Examen final de Álgebra y geometría (28/08/2020).

¡LEER ATENTAMENTE!

Debés resolver el examen y realizar el envío de las fotos (en formato PDF) **ANTES DE LAS 12 hs.** a la dirección: **verdecchia.algebraygeometria@gmail.com** , indicando en el asunto: Apellido y nombre del alumno - Examen que rinde.
En cada foto que tomes, apoyá tu DNI en algún extremo de la hoja.
Verificá que la foto sea nítida. Si la imagen no es clara, el ejercicio no se corregirá.
Cada ejercicio debe tener una resolución que justifique la respuesta.
En la primer hoja del examen **completá tus datos personales**: Apellido y nombre, y DNI.
Firmá la última hoja de tu examen.

1. Sean (O, XY) el sistema de coordenadas asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $(O', X''Y'')$ el sistema asociado a la base $B = \{(2, 1), (-1, 1)\}$ con origen en el punto O' de coordenadas $(4, 1)$ en el sistema (O, XY).

   (a) Escribir en el sistema $(O', X''Y'')$ la ecuación de una recta paralela al eje X que pasa por el punto O'.

   (b) Hallar el único punto del Plano que tiene las mismas coordenadas en los dos sistemas.

2. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de manera tal que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$[T]_C = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ a & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
tenga por autovalores a $\lambda_1 = 2$ (autovalor simple) y $\lambda_2 = -1$ (autovalor doble).
Para los valores $a, b \in \mathbb{R}$ hallados, responder **justificando adecuadamente**:

   (a) ¿Es T una transformación lineal simétrica?

   (b) ¿Es T diagonalizable?

   (c) ¿Es T diagonalizable en alguna base ortonormal?

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que a cada punto del Espacio le hace corresponder su simétrico respecto del plano $\pi : x - 2y + z = 0$. Hallar $[T]_C$, **usando una base adecuada** B, e indicando claramente B y $[T]_B$. ¿Es T una transformación lineal simétrica? **Justificar**.

4. Dadas las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$:

   (a) Hallar, si existen, sus intersecciones con los ejes coordenados y con los planos coordenados.

   (b) Clasificarlas y dibujarlas.

   (i) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}$.

   (ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1 + z^2$.

5. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, **justificando la respuesta**:

   (a) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $A^2 = Id_n$ entonces A es inversible.

   (b) El subconjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 = y^8\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Sea $M = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(\alpha, 1, 1) \in M$.

   (d) Un sistema de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones que incógnitas es siempre un sistema incompatible.

   (e) Sea $z \in \mathbb{C}$. Si $Im(z^2) = 0$ entonces $Re(z) = 0$ ó $Im(z) = 0$.