Experimento: acción que se realiza con el fin de observar el resultado.

DETERMINÍSTICOS

Son aquellos que repetidos en las mismas condiciones dan el mismo resultado, por lo tanto, son **predecibles**.

ALEATORIOS

Son aquellos que si se repiten bajo las mismas condiciones dan resultados distintos. Todos los resultados posibles se conocen de antemano, pero se desconoce cuál de ellos se va a dar. Los resultados **dependen del azar**.

Espacio Muestral (Ω) ⟶ conjunto de todos los resultados posibles de un Experimento Aleatorio.

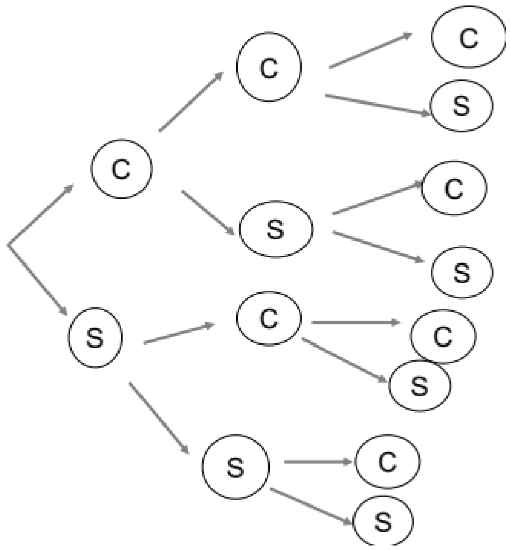
Según el número de elementos que contenga se clasifica en:

- Finito.
- Infinito numerable (contable).
- Infinito no numerable.

Pude expresarse en notación conjunto:

Ω = {(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c) ,(s,c,c) ,(s,s,s),(s,s,c) ,(s,c,s),(c,s,s)}.

O en notación árbol:



Suceso o evento es un subconjunto del espacio muestral Ω. Esto es, un evento es un conjunto de resultados de un experimento. Se denota: A, B C, ...

Evento elemental o simple	Evento compuesto
Es un resultado básico de un experimento. No puede descomponerse en resultados más simples. Está formado por un único elemento del espacio muestral.	Es el suceso formado por más de un evento elemental.

El espacio muestral Ω se denomina Evento Seguro. Ocurre siempre que se realiza el experimento.

Se denomina Evento imposible a aquel que nunca puede ocurrir. Se denota $\varnothing$.

Operaciones entre eventos

Evento intersección: al evento que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente ($A \cap B$).

Evento unión: al evento que ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B ($A \cup B$).

Evento complemento: al evento que ocurre cuando no ocurre A, y se $\bar{A}$ ó A^c ó A'. denota Es el evento formado por todos los elementos que no están en A. $A \cup A' = \Omega$.

Un evento A se dice **incluido o contenido** en un evento B si cada vez que ocurre A, ocurre B. Todo elemento de A pertenece a B, se denota $A \subseteq B$.

Dos eventos A y B se dicen eventos **mutuamente excluyentes** o disjuntos o incompatibles si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro. Es decir, si la intersección entre ellos es vacía ($A \cap B = \varnothing$).

Evento diferencia: la diferencia entre el evento A y el B es un evento constituido por los elementos de A pero no pertenecen a B. Es decir, evento que ocurre cuando ocurre A y no B ($A - B$ ó $A \backslash B$).

PROBABILIDAD

La **probabilidad** de un evento es una medida de la posibilidad de ocurrencia de ese evento.

→ Un número real entre 0 y 1.

Probabilidad

0 0.5 1.0

Es tan posible que el evento
ocurra como que no ocurra.

$0 \leq P(A) \leq 1$, A es un evento cualquiera

Noción empírica o frecuentista de probabilidad

Se estima la probabilidad de un evento A, a través de la frecuencia relativa del evento A.

Si se repite n veces un experimento aleatorio en forma independiente y bajo las mismas condiciones, denotamos: fA es el número de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones. La frecuencia relativa del suceso A, frA, se define:

$$f_{rA} = \frac{f_A}{n} = \frac{n° de\ veces\ que\ ocurre\ A}{n° de\ repeticiones\ del\ experimento}$$

Noción empírica cuando n crece indefinidamente, tiende frA a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos P(A) $\longrightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_{rA} = \mathrm{P(A)}.}$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Si realizamos n ejecuciones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un evento puede ser usada como una aproximación de la probabilidad de A. Esta aproximación es llamada la **probabilidad empírica de A.**

Sea A un suceso cualquiera de un espacio de muestral Ω, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. La frecuencia relativa de A es un número comprendido entre 0 y 1: $0 \leq frA \leq 1$.
2. Si $A = \Omega$, entonces la frecuencia relativa es 1: $fr\Omega = 1$.
3. Si $A = \emptyset$, entonces la frecuencia relativa es 0: $fr\emptyset = 0$.
4. Si B es incompatible con A, entonces la frecuencia relativa del suceso unión es la suma de las respectivas frecuencias relativas: Si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow frA \cup B = frA + frB$.

Cuando se usa la definición frecuentista:

La frecuencia relativa obtenida es únicamente una **estimación** del valor real de la probabilidad de que se de el suceso.

Cuanto mayor sea el número de veces que se repite el experimento, mejor será la estimación de la probabilidad, i.e., a mayor número de ensayos mejor será la estimación.

Cálculo de probabilidad

Noción clásica de probabilidad $\longrightarrow$ Sea E un experimento aleatorio tal que:

Su espacio muestral Ω está formado un número finito, n, de resultados.

Cada uno de los resultados del experimento posee la misma posibilidad de ocurrir, i.e., son equiprobables.

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}} = \frac{\text{N°de resultados favorables al suceso A}}{\text{N°de resultados posibles del experimento}}$$

Noción subjetiva de probabilidad

Cuando no se tienen datos para ningún tipo de cálculo, ni posibilidad de efectuar repetidamente el experimento, se recurre a un **experto**, quien de acuerdo a su buen saber y entender estimará la probabilidad de que ocurra ese evento.

Definición Axiomática de Probabilidad

Dado un experimento aleatorio E y Ω, su espacio muestral asociado, a cada evento A se le asociará un número real, que se notará P(A) y que se llamará probabilidad del evento A. Esta asignación debe satisfacer los siguientes axiomas:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Para toda sucesión de eventos disjuntos A1 , A2 , A3 ,..., An ,..., ie, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, se verifica que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Independientemente de que noción de probabilidad se utilice para el cálculo, siempre se deberán cumplir los tres axiomas mencionados.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD
1) $P(\emptyset) = 0$.
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$
3) Dados los eventos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4) Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
5) $P(A') = 1-P(A)$, para todo suceso A.
6) $P(A-B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.

Probabilidad condicional

Se desea averiguar la probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que se ha presentado el evento B.

Sean A y B eventos tales que $P(B) > 0$, la probabilidad del evento A **condiciona** a la ocurrencia del evento B es

$$\boxed{P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

Sean A y B eventos tales que $P(A) > 0$:

$$\boxed{P(\overline{B} / A) = 1 - P(B / A)}$$

Regla de la multiplicación

Dados dos sucesos A y B, tales que P(B) > 0 $\longrightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(B)\, P(A/B)}$

Si, además, P(A) > 0 $\longrightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)}$

Dados los sucesos A1 , … An.

$$\boxed{\begin{aligned} &P\,(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \\ &= P(A_1)\,.P(A_2/A_1)\,.\,P(A_3/A_1 \cap A_2)\ \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}) \end{aligned}}$$

EVENTOS INDEPENDIENTES $\longrightarrow$ Dos eventos A y B cualesquiera de un espacio muestral Ω se dicen estadísticamente independientes si la información acerca de la **ocurrencia de uno** de ellos **no afecta** la probabilidad de **ocurrencia del otro**, es decir,

- Ambos eventos tienen probabilidad positiva y P(A/B) = P(A) y P(B/A) = P(B)
- Al menos uno de los eventos tiene probabilidad nula.

En caso contrario, se dicen eventos estadísticamente **dependientes**.

<u>Regla de la multiplicación para eventos independientes</u>

Si los eventos A y B son independientes, P(A) > 0 y P(B) > 0, la probabilidad de la intersección de A y B es igual al producto de las probabilidades de A y B, en efecto,

Si P(B) > 0 y P (A) > 0

$\boxed{P(A \cap B) = P(B)\, P(A/B)}$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)}$

Si los eventos A y B son independientes $\longrightarrow$ $\boxed{P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)}$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)}$$

En resumen

1) Si P(B) > 0 y Si P(A) > 0 $\boxed{P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)}$

Los eventos A y B son independientes $\longrightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)}$

2) Los eventos A y B son independientes $\longrightarrow$ Al menos uno de los eventos tiene probabilidad nula.

Propiedades

Si los sucesos A y B son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \varnothing$, y $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, entonces A y B no son eventos independientes.

Si A y B son eventos independientes entonces,

- A y B c también lo son.
- A c y B también lo son.
- A c y B c también lo son.

Si P(A) >0 y P(B)>0, y A y B son mutuamente excluyentes, entonces son eventos dependientes.

Si la P(A) y P(B) son positivas, hay que calcular la $P(A \cap B)$ y ver si da el mismo resultado que el producto de las probabilidades. Si se verifique la igualdad los eventos serán independientes, en caso contrario, serán dependientes.

Si alguna de las probabilidades es nula, entonces son independientes.

Una colección de eventos A1 , A2 , A3 ,..., An constituye una partición del espacio muestral Ω si:

1. $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$.
2. $P(A_i) > 0$, para todo i.
3. $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Teorema de la Probabilidad Total

Sea A1 , A2 , A3 ,..., An una partición del espacio muestral Ω y sea B un suceso cualquiera tal que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$ $\forall i$,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B/A_i)$$

Teorema de Bayes

Sea A1 , A2 , A3 ,..., An una partición del espacio muestral Ω y sea B un suceso cualquiera tal que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$ $\forall i$,

$$\boxed{P(A_j/B) = \frac{P(A_j)\,P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)}.}$$

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Variable: característica o atributo medido sobre la unidad experimental.

Tipos de variables

- Cualitativas
  - **Nominales**: variables cuyas categorías no presentan un orden.
  - **Ordinales**: sus categorías pueden ordenarse.
- Cuantitativas
  - **Discretas**: Son las que resultan de conteos. Toman una cantidad finita o numerable de valores.
  - **Continuas**: Son las que resultan de una medición. Toma cualquier valor de un determinado intervalo o todos los números reales.

Sea E un experimento aleatorio, Ω su espacio muestral asociado. Una **variable aleatoria** X es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral Ω

$$\mathbf{X}:\ \Omega \rightarrow \Re,$$

$$\text{Sea } \omega \in \Omega, \qquad \omega \rightarrow \mathbf{X}(\omega) = x$$

El rango o recorrido de una v.a. X es el conjunto de valores reales que tienen asociado algún elemento del espacio muestral. Representa el conjunto de valores posibles de la v.a. X. Se denota RX .

En función del conjunto de sus valores posibles, las v.a. cuantitativas pueden clasificarse en **discretas** y **continuas**.

Una v.a. se dice **discreta** si toma un número finito o infinito numerable de valores.

Las variables discretas no tienen por qué tener un recorrido constituido por valores enteros.

Probabilidad puntual de una v.a. discreta

La probabilidad de que la v.a. discreta X tome el valor x, se denomina probabilidad puntual de la v.a. X, se define para todo x como $\boxed{P_X(x) = P(X = x)}$

La función de distribución de probabilidad o de cuantía o de masa de una v.a. discreta es la aplicación que asocia a cada valor x de la v.a. su respectiva probabilidad P(X=x). Ésta función puede describirse mediante una tabla, gráfico o una fórmula.

Distribución de probabilidad de una v.a. discreta

La función de distribución de probabilidad de una v.a. discreta X debe satisfacer dos propiedades:

1. $0 \leq P(X = x) \leq 1 \quad \forall\, x \in R_X$.

2. $\sum_{x \in R_X} P(X = x) = 1.$

<u>Función de distribución acumulada</u>

La función de distribución acumulada (f.d.a.) de una v.a. X y la notaremos FX (x), como: FX (x) = P(X ≤ x), con x ∈ R.

Sea X una v.a. que toma los valores x1 , x2 , x3 , …xn ,…; entonces, $F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{j \leq i} P(X = x_j)$

PROPIEDADES

1) FX (x) es no decreciente.

2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4) Es continua a derecha.

Valor Esperado de una v.a. discreta

$$\mathbf{E(X)} = 1 * P(X=1) + 2 * P(X=2) + 3 * P(X=3) + 4 * P(X=4) + 5 * P(X=5) = \mathbf{2.2}$$

Interpretación: El cliente, en promedio, contrata aprox. 2 paquetes.

Para calcular el valor promedio de X en la población	→	Conocer los valores posibles de X y sus respectivas probabilidades

El valor promedio, valor esperado o media de X es un promedio ponderado de los posibles valores 1, 2, ..., 5, donde los pesos son las probabilidades de esos valores.

Sea X una variable aleatoria discreta con rango RX y función de probabilidad puntual, la **esperanza o el valor esperado** de X se define: $E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = \sum_{x \in R_X} x\ P(X = x)$

Propiedades de la esperanza

1. Sea X v.a. tal que X = k ⇒ E(X) = k

2. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = X + k ⇒ E(Y) = E(X) + k

3. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = kX ⇒ E(Y) = k E(X)

Varianza de una v.a. discreta

La esperanza de una v.a. X determina el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, **pero no proporciona información** acerca de la forma de la distribución.

Sea X una v.a. con función de probabilidad puntual y esperanza μX , la **varianza** de X, que se denotará **V(X)**, σX 2 ó σ2 , es P(X = x)

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2 \right] = E\left[(X - E(X))^2 \right] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \; P(X = x)$$

La varianza de X, representa la dispersión promedio de las distancias al cuadrado de los valores de la v.a respecto a su valor esperado.

Se prueba desarrollando el cuadrado y aplicando propiedades de la esperanza, que

$$\boxed{\begin{aligned} V(X) &= \sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2 \right] = E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{x \in R_X} x^2 \, P(X = x) - \left[\sum_{x \in R_X} x \, P\,(X = x) \right]^2 . \end{aligned}}$$

Sea X una v.a. El desvío estándar de X, que se denotará, σX ó σ , es $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$ (Es la raíz cuadrada positiva de la varianza).

Varianza de una v.a. X

$$\boxed{V(X) = \sigma_X^2 = E\left[X^2 \right] - \left[E(X) \right]^2}$$

Desvío estándar de una v.a.X

$$\boxed{\sigma_X = +\sqrt{V(X)}}$$

Modelo Binomial

- El experimento consta de n ensayos idénticas, siendo n fijo.
- Cada ensayo tiene sólo dos resultados posibles, que se denominarán Éxito (E) y Fracaso (F). La probabilidad de tener un solo éxito en un sólo ensayo es igual a p, y la de tener un solo fracaso es q = 1 – p. Un ensayo de este tipo se denomina ensayo de Bernoulli.
- Los ensayos son independientes, es decir, que el resultado de un ensayo no influye sobre el de los otros.
- La probabilidad p y q permanecen constantes de ensayo a ensayo.

Variable aleatoria binomial Dado un experimento binomial que consta de n ensayos y en el cual P(E) = p, se denomina v.a. binomial a la variable

→ X = "número de éxitos en las n ensayos".

Distribución Geométrica

- El experimento consiste en una sucesión de ensayos idénticos, hasta obtener el primer éxito.
- Cada ensayo tiene dos resultados posibles que llamamos éxito (E) y fracaso (F), con P (E) = p, P (F)= q =1-p.
- En cada ensayo la probabilidad de éxito p y de fracaso q no varían.
- Los ensayos son independientes.

Valor Esperado y Varianza de una v.a. Geométrica

X = "número de ensayos hasta obtener el primer éxito".

$X \sim G(p)$ $R_X = \{1, 2, \ldots\}$ $E(X) = 1/p \quad y \quad V(X) = q/p^2$

E(X) representa el número esperado de éxitos logrados en los en n ensayos.

V(X) es la variabilidad del número de éxitos respecto del número promedio de éxitos logrados en n ensayos.

Distribución Binomial Negativa (Pascal)

1. El experimento consiste en una sucesión de ensayos idénticos, hasta obtener k éxitos.
2. Cada ensayo con dos resultados posibles que llamamos éxito (E) y fracaso (F), con P(E) = p, P(F) = q =1-p.
3. Al repetir el experimento la probabilidad de éxito p y de fracaso q no varían.
4. Los intentos son independientes.

$X \sim BN(k, p)$ indica que la v.a. X tiene distribución Binomial Negativa con parámetros k y *p*.

Valor Esperado y Varianza de una v.a. Binomial Negativa

X = "número de ensayos hasta obtener el k-ésimo éxito".

RX ={ k,k+1, …},

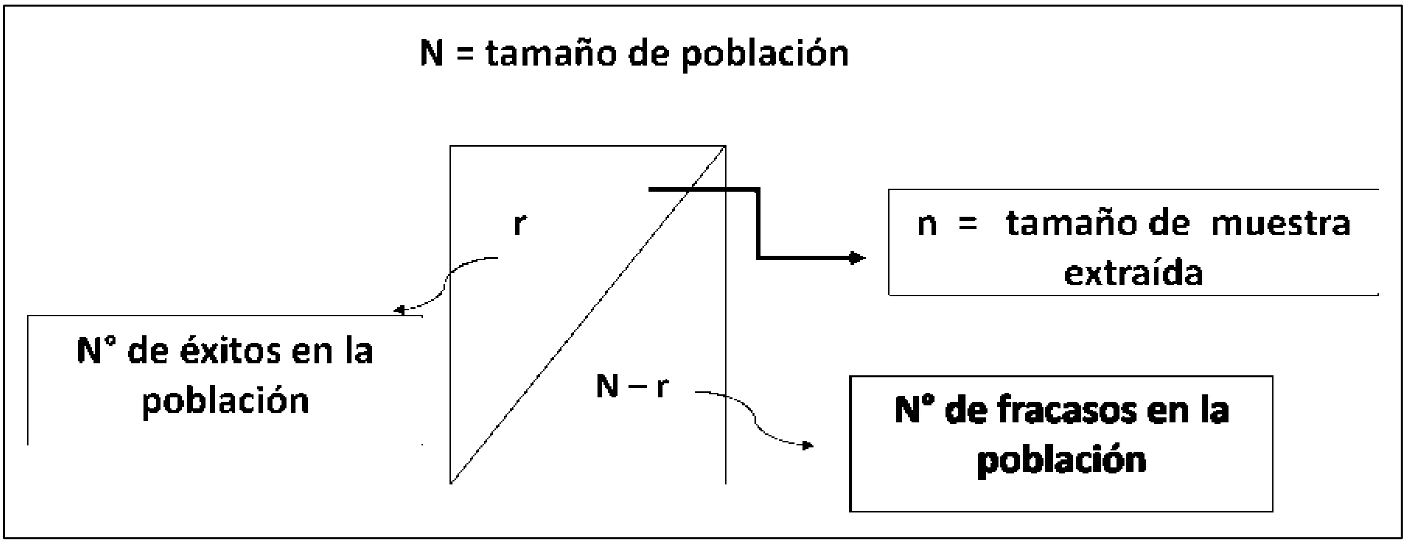
$$\boxed{E(X) = k/p \quad y \quad V(X) = qk/p^2}$$

Modelo	Definición de la v.a.	Lo aleatorio es el
Binomial	N° de éxitos en n ensayos	Número de éxitos
Binomial Negativa	N° de ensayos necesarios para obtener el k-ésimo éxito	Número de ensayos

Modelo Hipergeométrico

Un experimento se denomina Hipergeométrico si satisface las siguientes condiciones:

- El experimento consiste en extraer al azar y sin sustitución n elementos de una población finita de N elementos, cada uno de los cuales puede ser clasificado como éxito (E) y fracaso (F).
- Los N elementos de la población se dividen en r éxitos y N - r fracasos (F).



Dado un experimento hipergeométrico, se denomina v.a. hipergeométrica a la variable

$\longrightarrow$ X = "número de éxitos en la muestra de tamaño n".

Valor Esperado y la Varianza de una v.a. Hipergeométrica

X = "número de éxitos en la muestra de tamaño n". $\longrightarrow$ $X \sim H(N, n, r)$

$E(X) = n\dfrac{r}{N}$ y $V(X) = n\dfrac{r}{N}\dfrac{N-r}{N}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ donde $\longrightarrow$ es el factor de corrección por población finita.

Modelo de Poisson

Es el modelo que se caracteriza por evaluar el número de sucesos que ocurren en un intervalo especificado de tiempo o espacio.

- El experimento consiste en contar el número de veces que ocurre un determinado suceso durante un intervalo de tiempo o espacio específico (área, volumen, peso, distancia, etc.).
- La probabilidad de una ocurrencia del suceso es igual en dos intervalos disjuntos de igual longitud.
- La ocurrencia del suceso en cualquier intervalo es independiente de la ocurrencia del suceso en cualquier otro intervalo disjunto. Proceso de Poisson no tiene memoria.
- La probabilidad de que se presente un suceso, es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o espacio considerado.

<u>Variable aleatoria Poisson</u>

Dado un experimento Poisson, se denomina v.a. Poisson a la variable:

X = "número de sucesos que ocurren en un intervalo específico de tiempo o espacio".

Distribución de probabilidad Poisson: La distribución de probabilidad para una v.a. Poisson está dada por:

$$\mathbf{p_X(x) = P(X = x)} = \frac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!} \qquad \textbf{con } \mathbf{x} = 0,1,2,\ldots$$

Donde

λ= número promedio de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo o espacio.

x = número de eventos que ocurren en el intervalo de tiempo o espacio.

Valor Esperado y Varianza de una v.a. Poisson

X = "número de sucesos que ocurren en un intervalo específico de tiempo o espacio".

$X \sim P(\lambda)$ $R_X = \{0,1, 2, \ldots\}$, $\longrightarrow E(X) = \lambda = V(X)$

Ambos valores coinciden.

VARIABLE CONTINUA

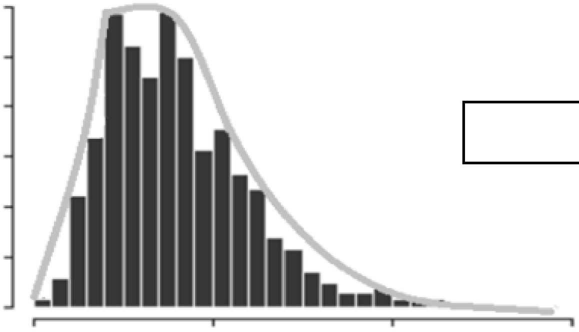
Una v.a. se dice continua si su rango es el conjunto de todos los valores pertenecientes a uno o más intervalos de la recta de los reales.

Función de densidad

La función de densidad de una v. a. continua puede estimarse a partir de la frecuencia relativa.

La **suma** de las áreas de todas las barras es **1** puesto que es igual a la suma de todas las frecuencias relativas.

Por lo tanto, **el área bajo la curva límite**, **función de densidad**, también es **1**.



Área bajo la función de densidad es 1

1. $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x)\, dx} = 1,$

El área bajo la curva desde - ∞ a + ∞ es 1.

Entonces f(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X.

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\longrightarrow$ Representa el área acotada por la función de densidad y las rectas X = a y X = b.

$$\mathbf{P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0}$$

La probabilidad puntual en una v.a. continua X es nula para todo $x \in Rx$.

Función de Distribución acumulada

La función de distribución acumulada (f.d.a.), FX (x), de una v.a. continua X se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

La función de distribución acumulada de la v.a. X, evaluada en x, FX (x), representa el área que se encuentra bajo la función de densidad acotada a derecha por la recta X = x.

Propiedades de la función de distribución acumulada

- $\forall\, x \in \Re$, FX (x) $\in [0,1]$.
- FX (x) es monótona no decreciente, es decir, si x1 < x2 $\Rightarrow$ FX (x1) $\leq$ FX (x2).
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\dfrac{dF_X(x)}{dx} = f(x).$

Esperanza de una variable aleatoria continua

Sea X una v.a. continua, con f.d.p. f(x), la esperanza o valor esperado o promedio de X se define como

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Sea X una v.a. continua con función de densidad de probabilidad f(x) y esperanza µX , la varianza de X, que se denota V(X) ó σX 2 , se define como

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\right]^2$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza, σX , se denomina **desvío estándar** y es también una medida de dispersión, con la ventaja sobre la varianza que tiene las mismas unidades que la correspondiente v.a.

Propiedades de E(X)

- E(a) = a
- E(a. X) = a. E(X)
- E(X + a) = E(X) + a
- $E(H(x)) = \int_{\Re} H(x) f(x) dx$

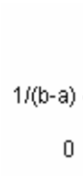
Propiedades de Var(X)

- V(a) = 0
- Var(a .X) = a 2 Var(X)
- Var(X + a) = Var(X)

Variable aleatoria uniforme

La variable aleatoria X está distribuida uniformemente en el intervalo [a,b], con a y b finitos y se denota X ~ U[a,b], si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a\le x\le b\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$



$$E(X)=\mu_X=\frac{a+b}{2} \qquad V(X)=\sigma^2{}_X=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Propiedad de la distribución uniforme

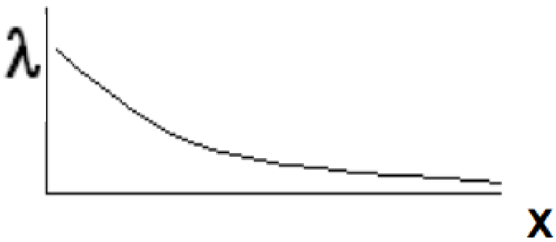
La probabilidad se determina únicamente por la longitud del intervalo, no por su ubicación.

Si $h > 0$, $t \in [a, b - h]$, la probabilidad $P(t < X < t+h)=\int_t^{t+h}\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{h}{b-a}$ es independiente de t.

Variable aleatoria exponencial

La v.a. X se dice que tiene una distribución exponencial de parámetro λ y se denota $X \sim Exp(\lambda)$, si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \quad \lambda>0\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

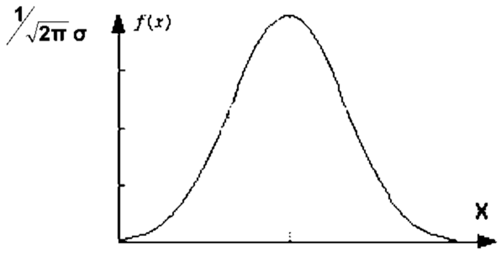


Esperanza y varianza de una v.a. Exp. (λ) $E(X)=\mu_X=\dfrac{1}{\lambda}$ $\quad V(X)=\sigma^2{}_X=\dfrac{1}{\lambda^2}$

Distribución Normal o Gaussiana

Variable aleatoria normal Una v.a. X se dice que tiene una distribución normal de parámetros μ y $\sigma 2$, y se denota $X \sim N(\mu, \sigma 2)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x)=\frac{e^{-(1/2)\,[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}, \; -\infty<x<\infty,\; -\infty<\mu<\infty,\; \sigma>0$$



Es una **curva** con forma de **campana**, que se extiende sin límite tanto en la dirección negativa como positiva de la recta real.

Simétrica respecto del valor de μ. (media). El eje de simetría está dado por la recta de ecuación $x = \mu$. El 50 % de los datos son mayores a la media y el otro 50% menores a su valor. El área a izquierda de es 0.5 y a derecha también.

El **valor máximo** de la función de densidad es $1/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ y se alcanza en $x = \mu$.

Es **creciente** si $x \in (-\infty, \mu)$, y **decreciente** si $x \in (\mu, +\infty)$.

Los **puntos de inflexión** de la curva se encuentran en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

<u>P(a ≤ X ≤ b) = el área acotada por la función de densidad y las rectas X = a y X = b,</u> $P(a\le X\le b)=\int_a^b \frac{e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}dx$

Una v.a. normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma 2 = 1$, recibe el nombre de v.a. **Normal Estándar** y se denota con la letra Z. Se denota $Z \sim N(\mu = 0, \sigma 2 = 1)$.

¿Qué ocurre si X NO es una v.a., normal estándar?

Dada la v.a. X, v.a. normal con media μ y varianza $\sigma 2$, no estándar, antes se la transformaba en v.a. estándar, mediante el empleo de la siguiente expresión:

$$\left.\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma 2), \text{ entonces la v.a. } Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ tiene un distribución } N(0,1).\right\} \text{ESTANDARIZACIÓN}$$

PRINCIPALES DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Distribución	Función de probabilidad	Media	Varianza
Uniforme (a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal (μ,σ^2)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2
Exponencial (λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$