

TERCER PARCIAL DE ELEMENTOS DE ÁLGEBRA Y DE GEOMETRÍA (21/06/17)

APELLIDO Y NOMBRE	[REDACTED]	NOTA:	A
CARRERA	[REDACTED]	LU:	[REDACTED]

- Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$ y $B(3, 0, -5)$ y los vectores $\vec{u} = (0, 2, 3)$ y $\vec{w} = (-1, 4, 2)$:
 - Hallar las componentes y el módulo del vector $\vec{s} = -4 \vec{AB}$.
 - Si el vector $\vec{w}$ tiene origen en A , ¿cuál es su extremo?
 - Hallar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \perp \vec{u}$ y $\vec{v} \perp \vec{w}$.
 - Calcular $\langle 2\vec{u} - \vec{w}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{AB}$.
- Dados los puntos $A(2, 2, 2)$, $B(0, 2, 2)$ y $C(1, 1, 0)$. Sea L la recta que pasa por los puntos B y C .
 - Hallar el punto E de la recta L tal que el segmento $\overline{AE}$ sea la altura del triángulo $\triangle ABC$.
 - Calcular el área del triángulo $\triangle ABC$.
- Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y = 0; y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
 - Mostrar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
 - Hallar una base de S y su dimensión.
- Sean r_1 y r_2 dos rectas del Plano tales que r_1 pasa por $P_1(-3, -1)$ y $P_2(-3, 4)$, y r_2 es perpendicular a la recta $l : 3x - 4y + 5 = 0$ siendo $P_3(1, -2)$ un punto en r_2 .
 - escribir ecuaciones paramétricas para r_1 y r_2 .
 - calcular la distancia de r_1 a r_2 .

Indicar el número de hojas entregadas sin incluir el enunciado: 4.

Firmar la última hoja.

NOTA: Las respuestas que no cuenten con la debida justificación no se calificarán.

$$① \quad A(-1, 2, 0) ; B(3, 0, -5) ; \vec{u} = (0, 2, 3) , \vec{w} = (-1, 4, 2)$$

a)

$$\vec{AB} = B - A \quad \checkmark$$

$$\vec{AB} = (3, 0, -5) - (-1, 2, 0)$$

$$\vec{AB} = (4, -2, -5) \quad \checkmark$$

$$\vec{s} = -4 \cdot \vec{AB}$$

$$\vec{s} = -4 \cdot (4, -2, -5)$$

$$\vec{s} = (-16, 8, 20) \quad \checkmark$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-16)^2 + 8^2 + 20^2} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$\vec{s} = (-16, 8, 20) \quad \checkmark$$

$$\|\vec{s}\| = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$$

b)

Sea el punto C, extremo del vector $\vec{w}$

$$\vec{w} = C - A \quad \checkmark$$

$$(-1, 4, 2) = C - (-1, 2, 0)$$

$$(-1, 4, 2) + (-1, 2, 0) = C$$

$$(-2, 6, 2) = C \quad \checkmark$$

$$\text{El extremo del vector } \vec{w} \text{ es } C = (-2, 6, 2) \quad \checkmark$$

① c) $\vec{u} = (0, 2, 3)$; $\vec{w} = (-1, 4, 2)$

$\vec{v} \perp \vec{u}$

$\vec{v} \perp \vec{w}$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8, -3, 2)$ ✓

$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(-8, -3, 2)}{\sqrt{77}} = \left(-\frac{8}{\sqrt{77}}, -\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}} \right)$

Solución: $\hat{v} = \left(-\frac{8}{\sqrt{77}}, -\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}} \right)$ ✓

① d) $\langle 2\vec{u} - \vec{w}, \vec{w} \rangle \cdot AB =$

$\langle 2 \cdot (0, 2, 3) - (-1, 4, 2), (-1, 4, 2) \rangle = (4, -2, -5) =$

$\langle (0, 4, 6) - (-1, 4, 2), (-1, 4, 2) \rangle = (4, -2, -5) =$

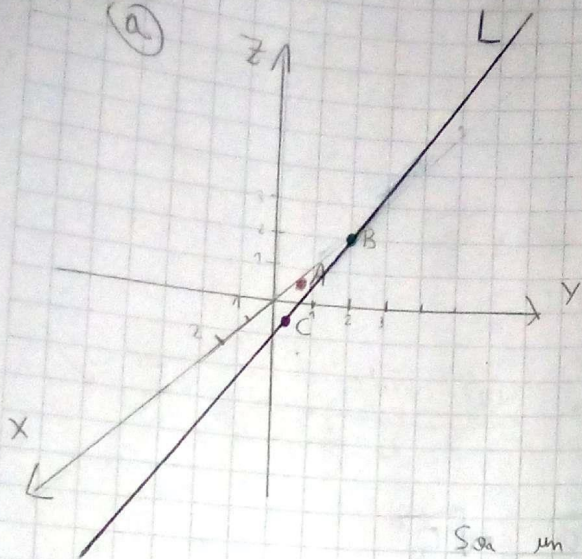
$\langle (1, 0, 4), (-1, 4, 2) \rangle = (4, -2, -5) =$

$7 \cdot (4, -2, -5) =$

$(28, -14, -35)$

Solución: $(28, -14, -35)$ ✓

2
(a)



• $A(2, 2, 2)$

• $B(0, 2, 2) \in L$

• $C(1, 1, 0) \in L$

$\vec{CB} = (-1, 1, 2)$ ✓

$L: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ✓

Sea un plano $\pi \perp L$, $A \in \pi$ ✓

$\Rightarrow \vec{N}_\pi = \vec{d}_L = (-1, 1, 2)$ ✓

$\pi: -x + y + 2z + d = 0$ ✓

Reemplazo? el punto A

$-2 + 2 + 2 \cdot 2 + d = 0$

$d = -4$ ✓

$\pi: -x + y + 2z - 4 = 0$ ✓

$E \in \pi \cap L$

$-x + y + 2z - 4 = 0$

$-(1-\lambda) + (1+\lambda) + 2 \cdot (2\lambda) - 4 = 0$

$-1 + \lambda + 1 + \lambda + 4\lambda - 4 = 0$

$6\lambda - 4 = 0$

$\lambda = 2/3$ ✓

$\begin{cases} x = 1 - \lambda \longrightarrow x = 1 - 2/3 \longrightarrow x = 1/3 \\ y = 1 + \lambda \longrightarrow y = 1 + 2/3 \longrightarrow y = 5/3 \\ z = 2\lambda \longrightarrow z = 2 \cdot 2/3 \longrightarrow z = 4/3 \end{cases}$ ✓

$E(1/3, 5/3, 4/3)$ ✓

2) b)

$$A = (2, 2, 2), \quad E = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AE} = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$C = (1, 1, 0), \quad B = (0, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1, 1, 2)$$

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad \checkmark$$

$$\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad \checkmark$$

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\| \cdot \|\overrightarrow{AE}\|}{2} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{30}}{3}}{2} = \sqrt{5} \quad \checkmark$$

El área del triángulo es $\sqrt{5}$

3) a) $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y = 0, y + z = 0 \} \in \mathbb{R}^3$

○ Veremos si $\vec{0} \in S$.

$$-2x + y = 0$$

$$-2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$y + z = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $\vec{0} \in S \quad \checkmark$

$$(1/2 y, y, -y)$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1/2 \cdot 0, 0, -0)$$

$$\Rightarrow (0, 0, 0) \quad \checkmark$$

$$\vec{0} \in S$$

○ $-2x + y = 0$

$$x = 1/2 y$$

$$y + z = 0$$

$$z = -y$$

$$S = (1/2 y, y, -y)$$

Si $\vec{u} \in S$ y $\vec{v} \in S$, entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Sea } \vec{u} = (1/2 \lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (1/2 \lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1/2 \lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) + (1/2 \lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2)$$

$$= (1/2 \lambda_1 + 1/2 \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, (-\lambda_1) + (-\lambda_2))$$

$$= (1/2 (\lambda_1 + \lambda_2), \lambda_1 + \lambda_2, -(\lambda_1 + \lambda_2))$$

Por lo tanto, $\vec{u} + \vec{v} \in S \quad \checkmark$

○ Si $\vec{u} \in S \Rightarrow \gamma \cdot \vec{u} \in S$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$$\gamma \cdot \vec{u} = \gamma (1/2 \lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1) = (\gamma \cdot 1/2 \lambda_1, \gamma \cdot \lambda_1, \gamma \cdot (-\lambda_1)) =$$

$$= (1/2 (\gamma \cdot \lambda_1), \gamma \cdot \lambda_1, -(\gamma \cdot \lambda_1))$$

Por lo tanto, $\gamma \cdot \vec{u} \in S \quad \checkmark$

Finalmente, S es un subespacio de $\mathbb{R}^3 \quad \checkmark$

③ ⑥

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + y = 0, y + z = 0 \} \in \mathbb{R}^3$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = (1/2 y, y, -y), y \in \mathbb{R} \} \in \mathbb{R}^3$$

$$(1/2 y, y, -y) = (x, y, z)$$

$$y \cdot (1/2, 1, -1) = (x, y, z)$$

$$B = \{ (1/2, 1, -1) \} \checkmark$$

¿y la justificación?

$$\dim B = 1 \checkmark$$

$$B = \{ (1/2, 1, -1) \}$$

$$\dim B = 1$$

④ a)

$$P_1 (-3, -1)$$

$$P_2 (-3, 4)$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (0, 5)$$

$$P_3 (1, -2) \in r_2$$

$$\Rightarrow r_1: \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 + 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \checkmark$$

$$L: 3x - 4y + 5 = 0$$

$$(-3, -1) \in L$$

$$L: \begin{cases} x = -3 + 4\alpha \\ y = -1 + 3\alpha \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \checkmark$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 + 3\gamma \\ y = -2 - 4\gamma \end{cases}$$

$$\gamma \in \mathbb{R} \checkmark$$

$$\langle d_L, d_{r_2} \rangle = 0$$

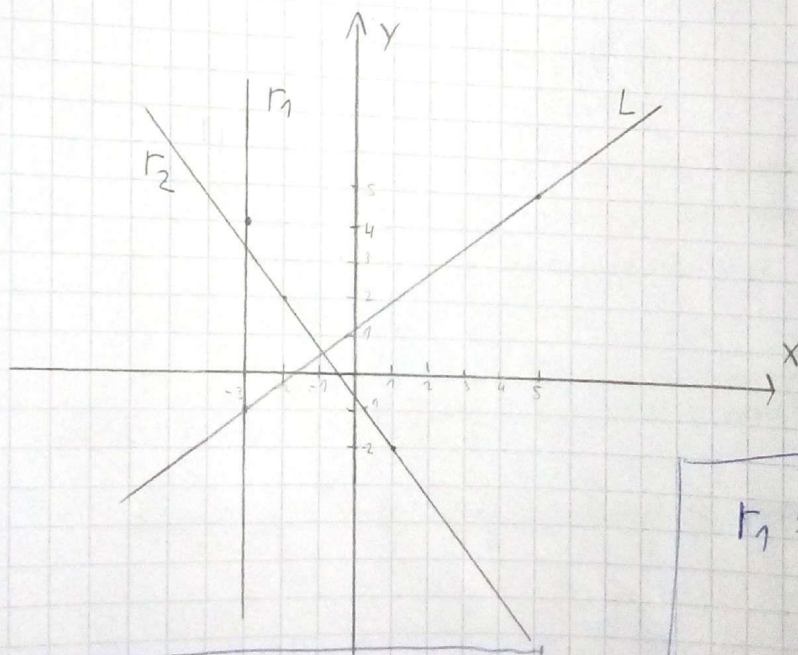
$$\langle (4, 3), (x, y) \rangle = 0$$

$$4x + 3y = 0$$

$$\text{s. } x = 3, y = -4$$

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$



$$r_1: \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 + 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \checkmark$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 + 3\gamma \\ y = -2 - 4\gamma \end{cases}, \gamma \in \mathbb{R} \checkmark$$

Como r_1 y r_2 se intersectan,
la distancia entre ellas es 0

$$d(r_1, r_2) = 0$$