Unidad IV

Prueba de Hipótesis
Parte II

¿¿¿Con cuál me quedo????

Hipótesis Nula:
No hay diferencias

Hipótesis Alternativa:
Hay diferencias significativas

Estadísticos de Prueba de hipotesis para $E(X) = \mu$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 es conocido $\qquad \overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z \sim N(0,1)$$

σ^2 es desconocido $\qquad \overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n \ ?)$

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Si $X \sim$????

σ^2 es conocido $\rightarrow$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z \sim N(0,1)$$

$n \geq 30$, por el Teo. Central de L.

σ^2 es desconocido $\rightarrow$

$$Z \cong \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Enfoque P en una Prueba de Hipótesis

¿Qué será eso?

Valor P de una prueba de hipótesis

Otra manera de presentar los resultados de una **Prueba de hipótesis** es establecer que la hipótesis nula fue o no rechazada con un valor especificado α o nivel de significación. Esta nueva forma es el **enfoque del valor P.**

Definición:

El **valor P** es el ***nivel de significación*** más pequeño que conduce al **rechazo** de la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$.

El **valor P** es la **probabilidad** de que el **estadístico de prueba** tome un **valor** que sea **al menos** tan extremo como el **valor observado del estadístico de prueba** cuando la hipótesis nula $\mathbf{H_0}$ es verdadera.

Para aplicar el enfoque del valor P se necesita:

1. El planteo de las hipótesis.
2. El estadístico de prueba y su distribución bajo H_0 cierta.
3. El valor del estadístico de prueba bajo H_0 cierta.

Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

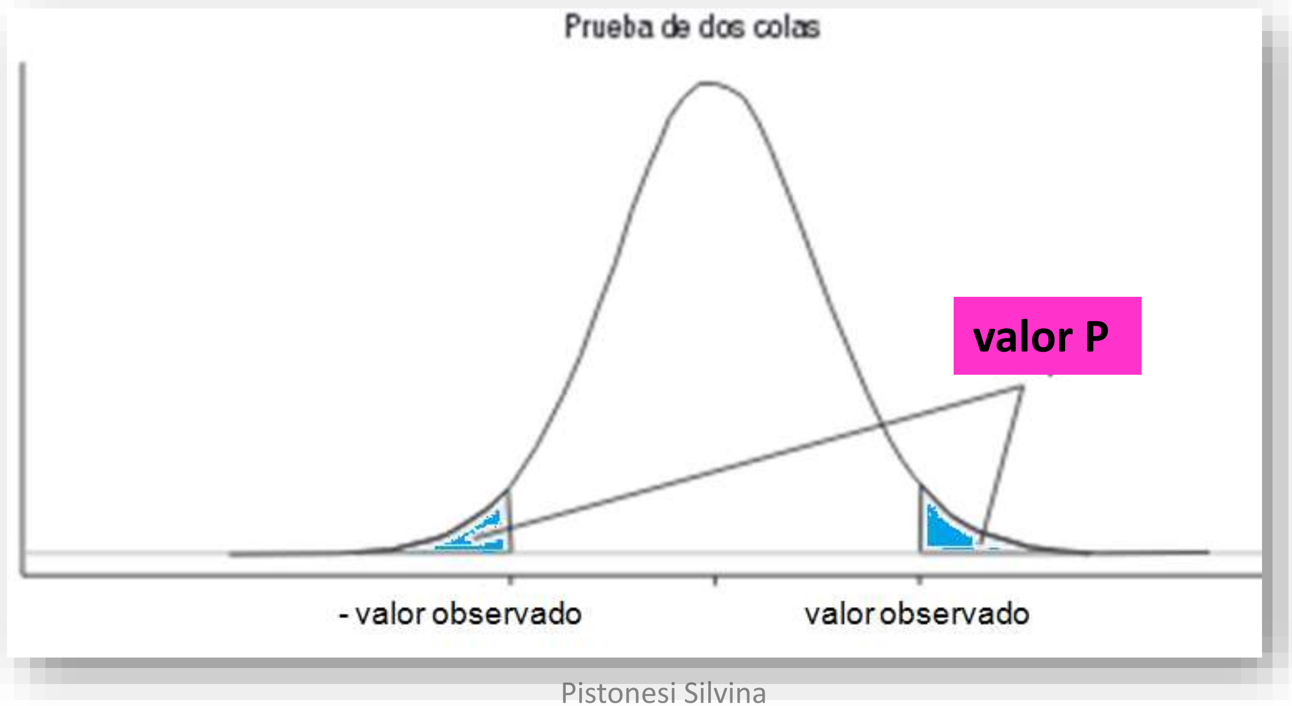
Prueba bilateral:

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$

$$\textbf{valor P} = P(Z \leq -|z_{obs}|) + P(Z \geq |z_{obs}|) = \mathbf{2 * P(Z \leq -|z_{obs}|)}$$

donde $\mathbf{z_{obs}}$ es el **valor del estadístico de prueba** calculado en los **datos de la muestra**.



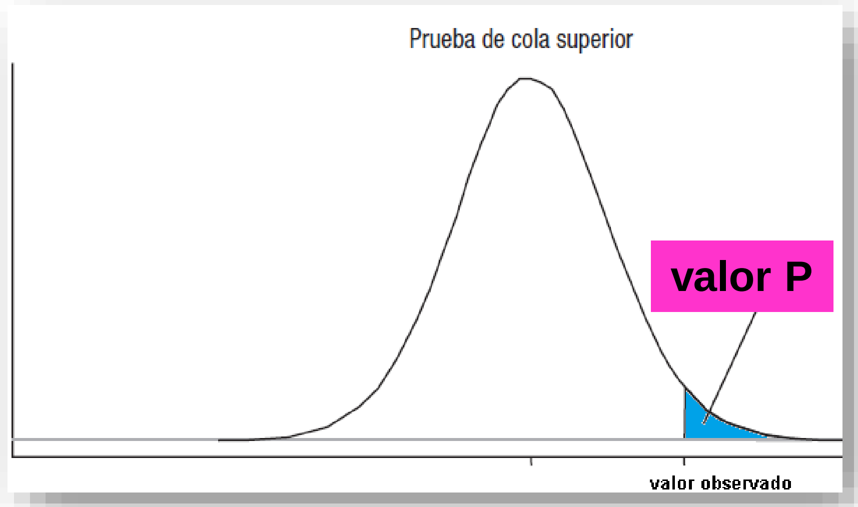
Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

Pruebas unilaterales:

H$_0$: $\mu = \mu_0$
H$_1$: $\mu > \mu_0$

$$\text{valor P} = P(Z \geq z_{obs})$$

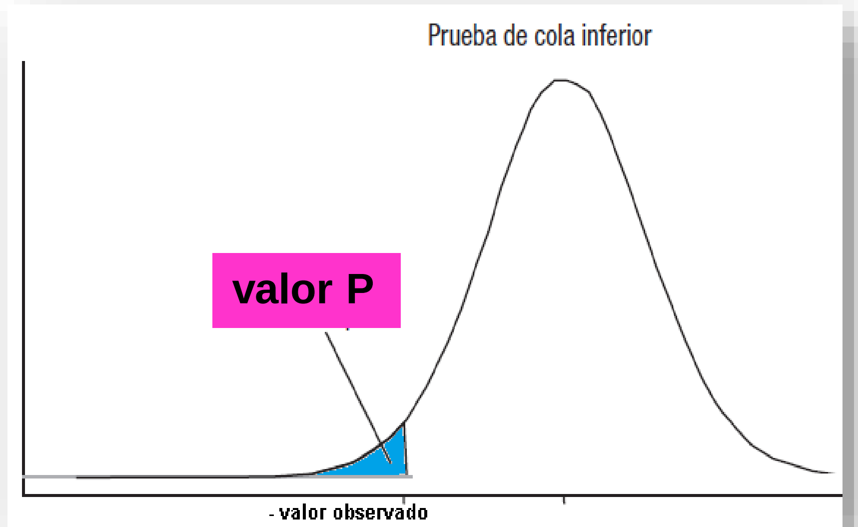
donde z_{obs} es el **valor del estadístico de prueba** calculado en los **datos** de la **muestra**.



H$_0$: $\mu = \mu_0$
H$_1$: $\mu < \mu_0$

$$\text{valor P} = P(Z \leq -z_{obs})$$

donde $-z_{obs}$ es el **valor del estadístico de prueba** calculado en los **datos** de la **muestra**.



Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza conocida

Decisión mediante el enfoque del valor P:

- Si el nivel de significación observado, ie, el **valor P,** es **menor o igual** que **0.05** entonces se decide **Rechazar lo que postula H_0,**

- en **caso contrario**, **no se Rechaza H_0**.

Conclusiones:

- Con una **probabilidad de error P**, existen evidencias suficientes para afirmar que … . La prueba **es significativa.**

- Con un **nivel de significación** de **P**, no existen evidencias suficientes para afirmar que … . La prueba **es no significativa.**

Valor P: Prueba de hipótesis significativa o no significativa

Valor P		Decisión	La prueba es	Se simboliza
Si **P** ≤ 0.05	**P** ≤ 0.01	**Rechazo H_0**	Altamente significativa	**
	0.01< **P** ≤ 0.05	**Rechazo H_0**	Significativa	*
Si **P** > 0.05		**No Rechazo H_0**	No significativa	**n.s.**

Que una prueba de hipótesis sea **significativa** significa que la conclusión a la que se llegó **no se debe** al mero **azar**.

Si se analiza por ejemplo, la **eficacia de un antivirus**,

H_0: el antivirus es eficaz
H_1: el antivirus no es eficaz

Un resultado experimental «***significativo***» con un valor **P** de **0,05** o **menos** (**Rechazo H_0**) significa que **hay una probabilidad** de **0.05** o **menos** de que el antivirus **no sea eficaz**.

Ejemplo

Un hipermercado ha cambiado recientemente sus máquinas registradoras, lo que hace suponer que el tiempo promedio de facturación por cliente puede haber variado respecto al tiempo promedio de facturación con las máquinas anteriores, que era de 10 minutos. Para probar la validez de esta suposición, se seleccionó una muestra aleatoria de 16 clientes que arrojó un tiempo promedio de facturación por cliente de 8.5 minutos.

Es posible suponer que el tiempo de facturación por cliente es una v.a. distribuida normalmente con un desvío estándar de 2.5 minutos.

¿Se puede concluir que el tiempo promedio de facturación por cliente ha cambiado respecto del valor histórico de 10 minutos? Concluir usando el **valor P**.

Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza conocida

Ejemplo:

Planteo $H_0: \mu$
$H_1: \mu$

Estadístico de Prueba bajo H_0 cierta:

$$= \frac{\overline{X} -}{/\sqrt{}} \sim$$

Valor del estadístico de Prueba bajo H_0 cierta:

$$= \frac{-}{/\sqrt{}} =$$

Datos: n= , que arrojó $\bar{x}$ =

Calculo del valor P:

P =

Como P 0.05, entonces H_0 .

Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza conocida

Planteo $H_0: \mu$
$H_1: \mu$

Como P = 0.05, entonces H_0 .

Conclusión:
Con un , existen evidencias suficientes para afirmar que

Prueba de hipótesis para la media de una población normal con varianza desconocida

Pruebas unilaterales:

H$_0$: $\mu = \mu_0$

H$_1$: $\mu > \mu_0$ **valor P** $= P(\, t_{n\text{-}1} \geq t_{obs}\,)$

donde $\mathbf{t_{obs}}$ es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

H$_0$: $\mu = \mu_0$

H$_1$: $\mu < \mu_0$ **valor P** $= P(\, t_{n\text{-}1} \leq\text{-}\, t_{obs}\,)$

donde **-** $\mathbf{t_{obs}}$ es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

Prueba bilateral:

H$_0$: $\mu = \mu_0$

H$_1$: $\mu \neq \mu_0$ **valor P** $= P(t_{n\text{-}1} \leq -|t_{obs}|\,) + P(t_{n\text{-}1} \geq |t_{obs}|\,) = 2 * P(t_{n\text{-}1} \geq |t_{obs}|\,)$

donde $\mathbf{t_{obs}}$ es el valor del estadístico de prueba calculado en los datos de la muestra.

Ejemplo

Una empresa de hardware ha lanzado una nueva tarjeta gráfica que, según sus desarrolladores, reduce el tiempo promedio de renderizado de imágenes complejas a menos de 18 milisegundos (ms). Para verificar esta afirmación, un equipo independiente de técnicos realiza un estudio con una muestra aleatoria de 25 pruebas de renderizado utilizando esta tarjeta con el mismo software y tipo de imagen en todos los casos, obteniendo una media de **17.5 ms** y desviación estándar de **1.2 ms**. **Concluir usando el valor P.**

Sea la v.a.

X = "tiempo de renderizado de una imagen compleja " **(ms),**

X ~ N(μ, σ^2), σ^2 es desconocido.

$\overline{X}$ ~ N(μ, σ^2 /n = ?),

Ejemplo: Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza desconocida

Planteo

$H_0: \mu$

$H_1: \mu$

Estadístico de Prueba: **bajo H_0 cierta**

$$= \frac{\overline{X} - }{ / \sqrt{}} \quad \sim$$

El valor del estadístico es:

$$= \frac{ - }{ / \sqrt{}} =$$

Datos: n = , $\bar{x}$= y s = .

valor P =

Por lo tanto, dado que en la prueba de hipótesis resultó un valor **P =**

Al ser **P** 0.05, entonces la hipótesis nula, H_0.

Ejemplo: Prueba de hipótesis para la media poblacional con varianza desconocida

Planteo

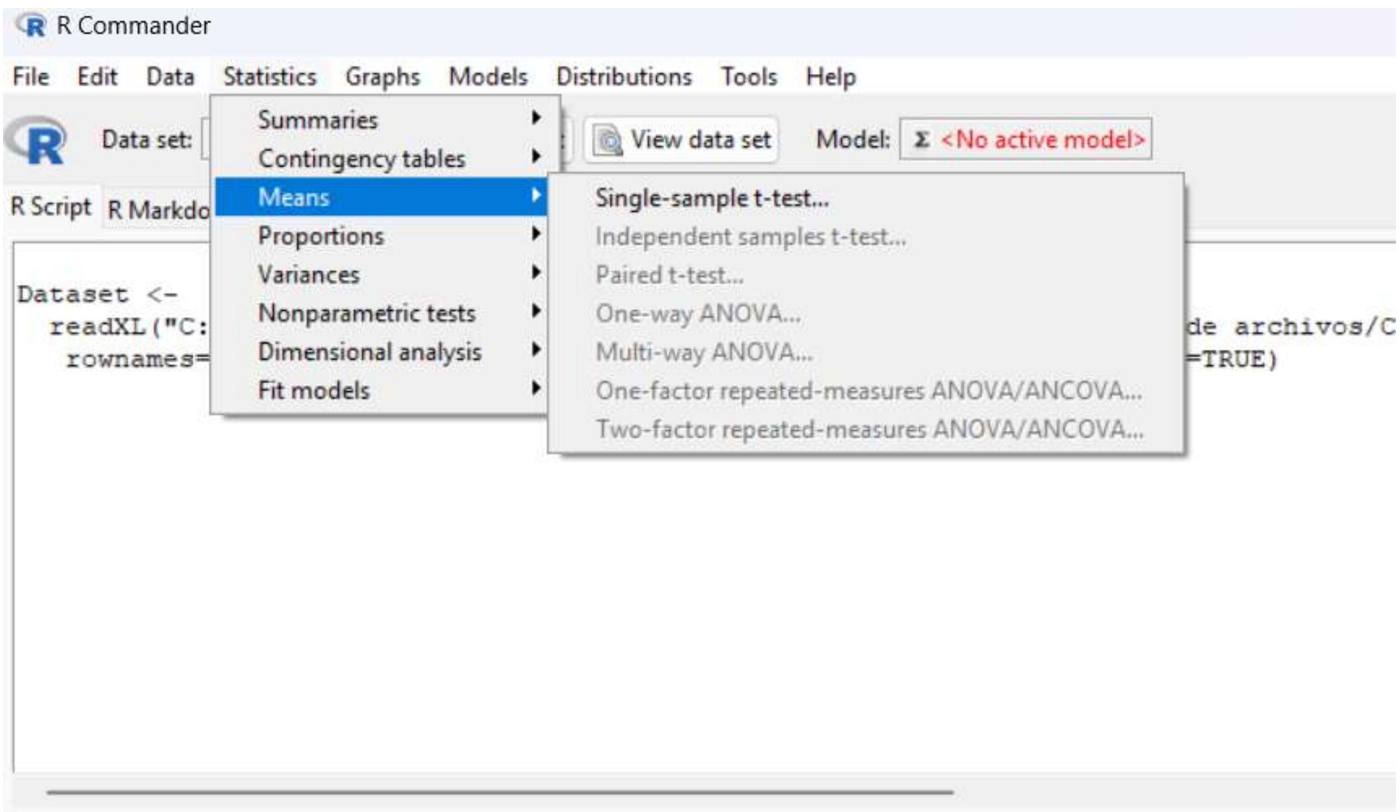
H_0: μ

H_1: μ

P = , Al ser **P** 0.05, entonces la hipótesis nula, H_0.

Conclusión: Con un , existen evidencias suficientes para afirmar que


R Commander
File Edit Data Statistics Graphs Models Distributions Tools Help
Data set: Dataset
Edit data set
View data set
Model: Σ <No active model>
R Script R Markdown
Dataset <-
readXL("C:/Users/Silvina Pistonesi/Documents/Asus_2025_enero/Respaldo de archivos/Compact_2020_AG/Compac_2020_agosto/M
rownames=FALSE, header=TRUE, na="", sheet="Ejemplo", stringsAsFactors=TRUE)


R Commander
File Edit Data Statistics Graphs Models Distributions Tools Help
Data set:
View data set
Model: Σ <No active model>
R Script R Markdo
Summaries
Contingency tables
Means
Proportions
Variances
Nonparametric tests
Dimensional analysis
Fit models
Single-sample t-test...
Independent samples t-test...
Paired t-test...
One-way ANOVA...
Multi-way ANOVA...
One-factor repeated-measures ANOVA/ANCOVA...
Two-factor repeated-measures ANOVA/ANCOVA...
Dataset <-
readXL("C:
rownames=
de archivos/C
=TRUE)

Ejemplo salida de Rcmdr

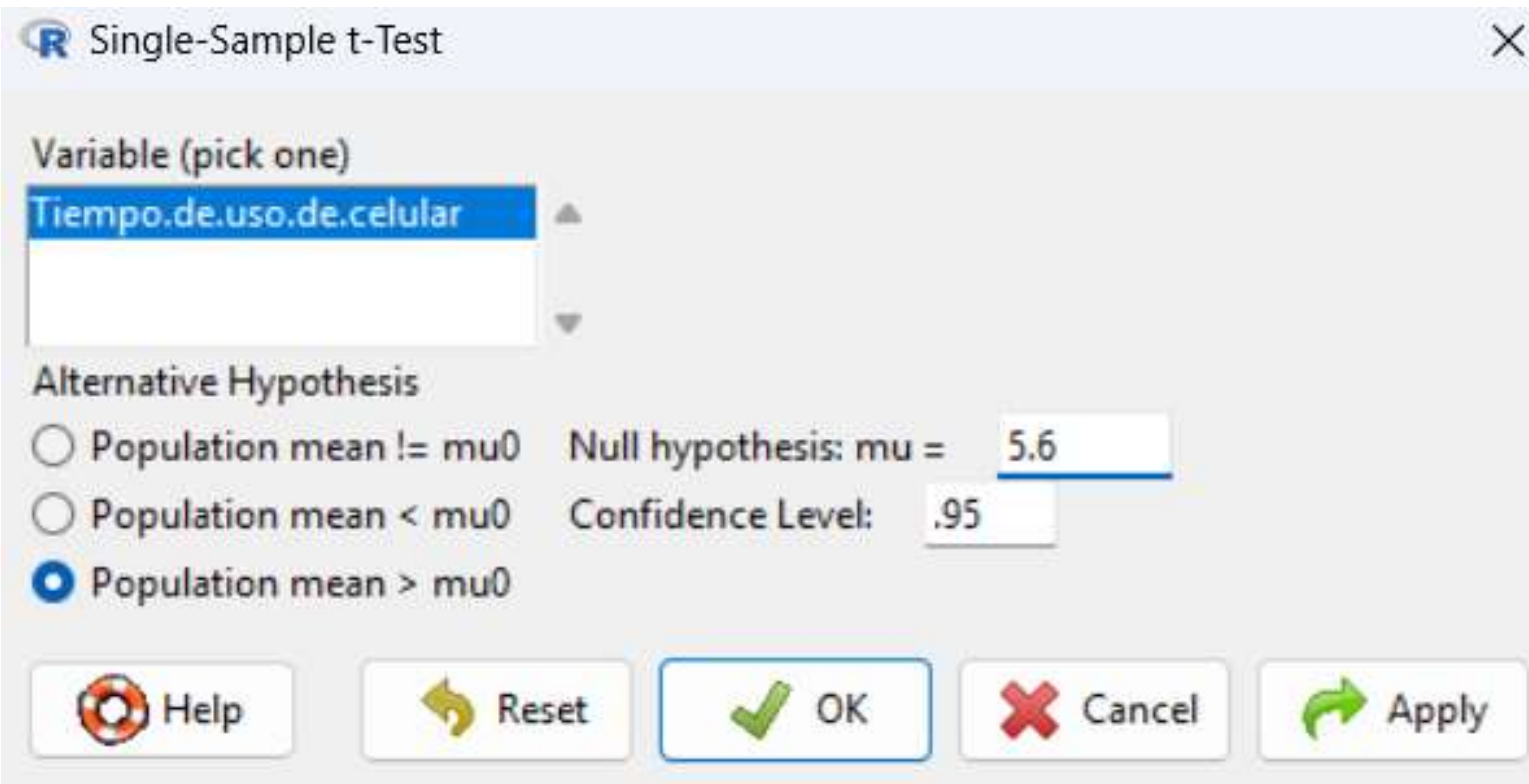
Se realizó una investigación respecto al uso del teléfono celular en las actividades académicas. Hoy en día, los estudiantes utilizan los dispositivos móviles, entre otras cosas, para bajar apuntes, revisar prácticos, consultar bibliografía, enviar mails, etc. Se sospecha que el tiempo promedio que un estudiante utiliza el celular diariamente en actividades académicas es superior a **5.6** hs.
Para el estudio se encuestaron al azar **45** estudiantes y se registró el tiempo, en horas, que utilizan el celular por día, en actividades académicas. Los datos obtenidos se presentan en la Base_Ej, hoja 1. Se sabe que ese tiempo se distribuye normalmente.

a) Especificar la hipótesis nula y la alternativa apropiadas para verificar lo que se sospecha.

b) Usando el **Rcmdr**, ¿qué puede concluir respecto de la sospecha? Incluir la salida del software.

Planteo

H_0: $\mu \leq 5.6$ (es equivalente a $\mu = 5.6$)
H_1: $\mu > 5.6$



Planteo

H_0: $\mu \leq 5.6$ (es equivalente a $\mu = 5.6$)

H_1: $\mu > 5.6$

```
        One Sample t-test

data:  Tiempo.de.uso.de.celular
t = 2.8245, df = 44, p-value = 0.003545
alternative hypothesis: true mean is greater than 5.6
95 percent confidence interval:
 6.086594      Inf
sample estimates:
mean of x
 6.801111
```

P = 0.0035, Al ser **P** < 0.05, entonces **se Rechaza** la hipótesis nula, $\mathbf{H_0}$.

<u>Conclusión</u>: Con una probabilidad de error de **0.0035**, existen evidencias suficientes para afirmar que tiempo promedio que un estudiante utiliza el celular diariamente en actividades académicas es superior a 5.6 hs. **La prueba es altamente significativa (P < 0.01).**

Prueba de Hipotesis para la Varianza de una población normal

$$\sigma^2$$

Prueba de hipótesis para la varianza de una población normal

Se desea probar la hipótesis nula de que la varianza de una población normal σ^2 es igual a un valor específico, por ejemplo σ_0^2.

<u>Planteo:</u> Se quiere probar H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ frente a una de las siguientes hipótesis alternativas posibles:

1. H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
2. H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$
3. H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

<u>El estadístico de prueba:</u>

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

donde S^2 es la varianza muestral.
Si H_0 es verdadera, el estadístico de prueba tiene una distribución chi-cuadrada con n-1 grados de libertad.

<u>Las respectivas regiones críticas son:</u>

$$\begin{cases} 1. \left\{ \chi^2_{n-1} \,/\, \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,\,\alpha/2} \text{ o } \chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2} \right\} \\ 2. \left\{ \chi^2_{n-1} \,/\, \chi^2_{n-1} > \chi^2_{n-1,\,1-\alpha} \right\} \\ 3. \left\{ \chi^2_{n-1} \,/\, \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1,\,\alpha} \right\} \end{cases}$$

Prueba de hipótesis para el Desvío Estándar de una población

OBSERVACIÓN IMPORTANTE!!!!!

Si se desea probar una afirmación respecto del desvío estándar σ de una población, se deberá plantear las hipótesis y realizar la prueba en términos de la varianza poblacional σ^2, puesto que el estadístico con distribución conocida, χ^2_{n-1} está en función de σ^2.

Ejemplo:

Un supervisor de control de calidad en una enlatadora sabe que la cantidad exacta contenida en cada lata varía, pues hay ciertos factores imposibles de controlar que afectan la cantidad de llenado. La variación de la cantidad de llenado es importante; si es grande, algunas latas contendrán muy poco y otros demasiado. Las agencias reguladoras especifican que el desvío estándar de la cantidad de llenado debe ser menor que 0.1 onzas. El supervisor de control de calidad muestreó $n = 10$ latas y midió la cantidad de llenado en cada una, obteniendo un desvío estándar igual a 0.043. ¿Proporciona esta información prueba suficiente de que el desvío estándar σ de las mediciones de llenado es menor que 0.1 onzas, trabajando a un nivel de significación del 1%? Se puede suponer que la cantidad de llenado sigue una distribución normal.

Sea la v.a. **X** = "cantidad de llenado por lata", **X ~ N(** μ, σ^2 **).**

.

Planteo:

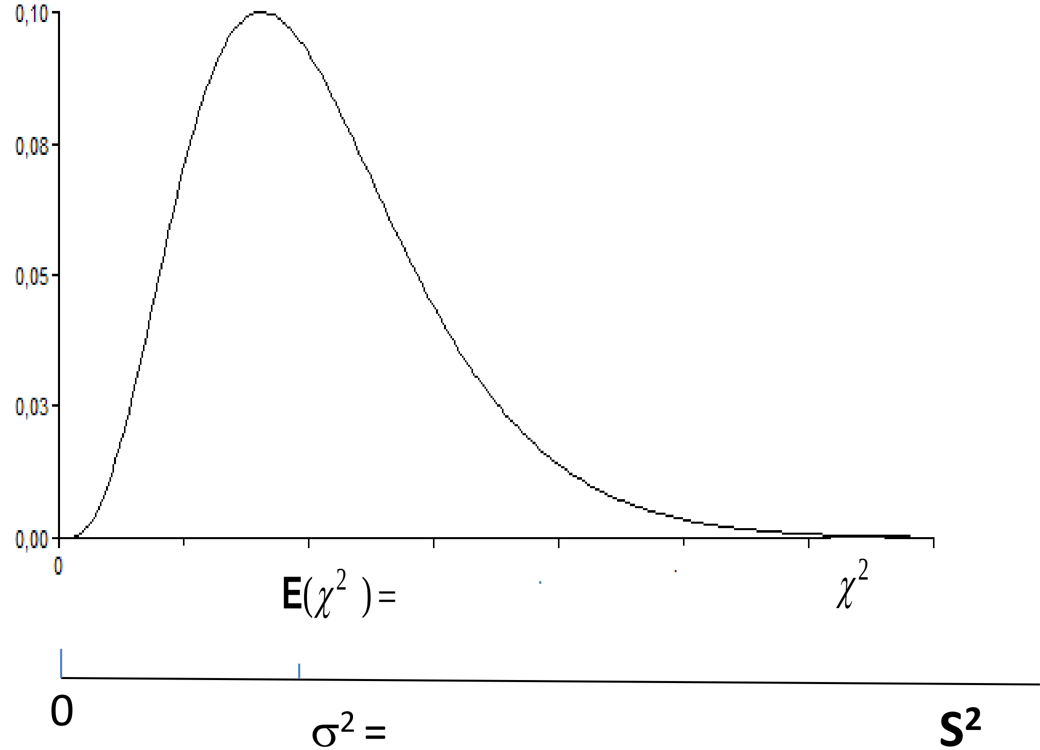
H_0: σ^2

H_1: σ^2

α =

Estadístico de prueba bajo H_0:

$$\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} =$$



Región crítica:

$$RC = .\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

El valor del estadístico es:

Datos: n = y s =

$$= \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} =$$

Como **Región crítica**, por lo tanto **H_0.**

Conclusión:

Con un ,

Ejercicios:

1. La compañía telefónica estudia continuamente la duración de las comunicaciones telefónicas y la variabilidad de dicha duración. El desvío estándar poblacional de la duración de las llamadas en todo el país es de 2 minutos. La compañía telefónica desea determinar si las llamadas efectuadas en cierta localidad difieren de las de todo el país en cuanto a la variabilidad. Si una muestra aleatoria de 25 llamadas efectuadas en dicha localidad arrojó un desvío de 1.6 minutos, a un nivel de significación del 5% ¿qué se puede concluir? Puede suponerse que la duración de las llamadas se distribuye normalmente.

2. Con el fin de tener ordenada la escala salarial del personal docente en una universidad, el decano trata de que la varianza de los salarios del centro se mantenga en 4000 dólares^2. Si no es así, realizará ajustes para dejar los salarios dentro de límites. Para ello se seleccionó una muestra de 10 docentes obteniéndose los siguientes sueldos en dólares:

2100 2270 2250 2300 2240 2300 2200 2295 2100 2250

a) Al nivel del 1%, ¿deberá realizar el decano ajustes de salarios? Suponer normalidad de los datos.
b) Según el enfoque P ¿Qué puede concluir?

1. Sea la v.a. **X** = “tiempo , en minutos, de duración de una llamada en la localidad”, **X ~ N(μ, σ^2)**

Planteo:

H_0: σ^2
H_1: σ^2

α = 0.05

E$(\chi^2\ ) =$ χ^2

0 $\sigma^2 =$ **S^2**

Estadístico de prueba bajo H_0:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\qquad}{\qquad} = \chi^2_{n-1} =$$

Región crítica:

$$RC = .\{ \qquad \}$$

El valor del estadístico es:

Datos: n = y s =

$$\chi^2_{obs} = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Pistonesi Silvina

Como **Región crítica**, por lo tanto **H_0.**

Conclusión:

Con , evidencias suficientes para afirmar que la variabilidad de la duración de las llamadas en la localidad difieran de

2. Sea la v.a. **X** = "salario de un docente de una universidad" (dólares) , **X ~ N(μ, σ²).**

a) Planteo:

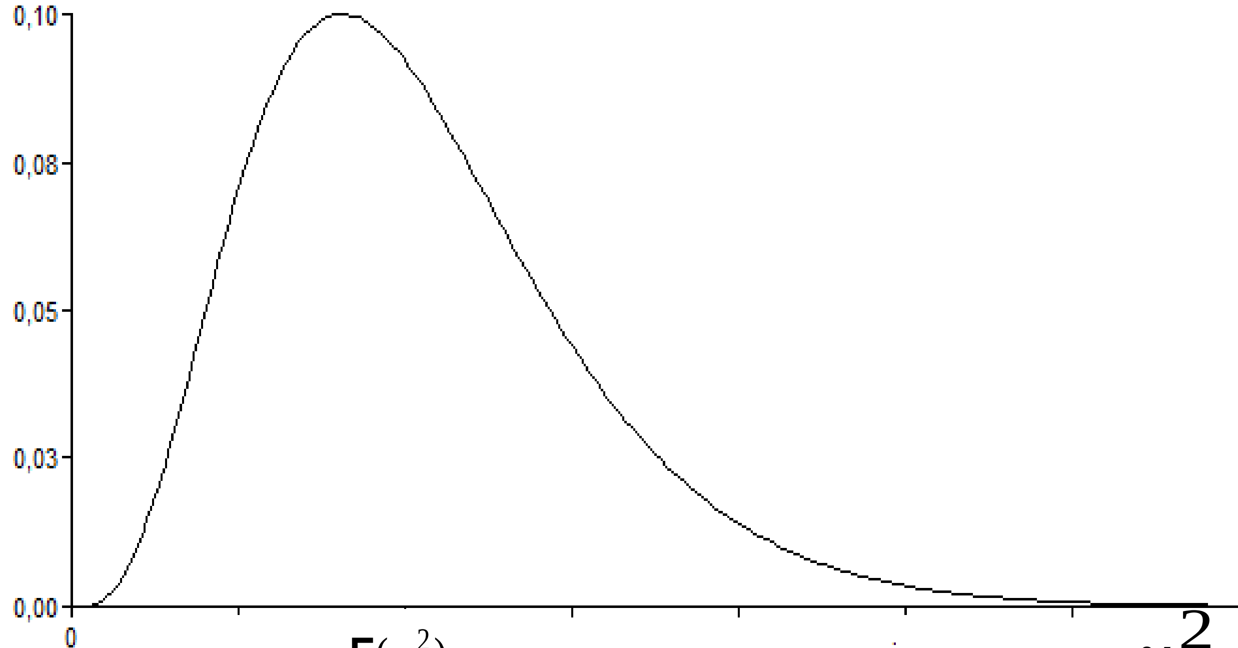
$H_0: \sigma^2 = 4000$

$H_1: \sigma^2 \neq 4000$

$\alpha = 0.01$

Estadístico de prueba bajo H_0:

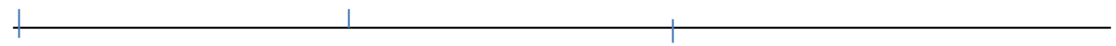
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)S^2}{4000} = \chi^2_{n-1=9}$$



$E(\chi^2) =$

Región crítica:

$$RC = \left\{ \chi^2 \ / \ \chi^2 < \chi^2 \ , \ = \right\}$$



El valor del estadístico es:

Datos: $n = 10$ y $s = 75.44$ $\chi^2_{obs} = \underline{\qquad\qquad\qquad} =$

Pistonesi Silvina

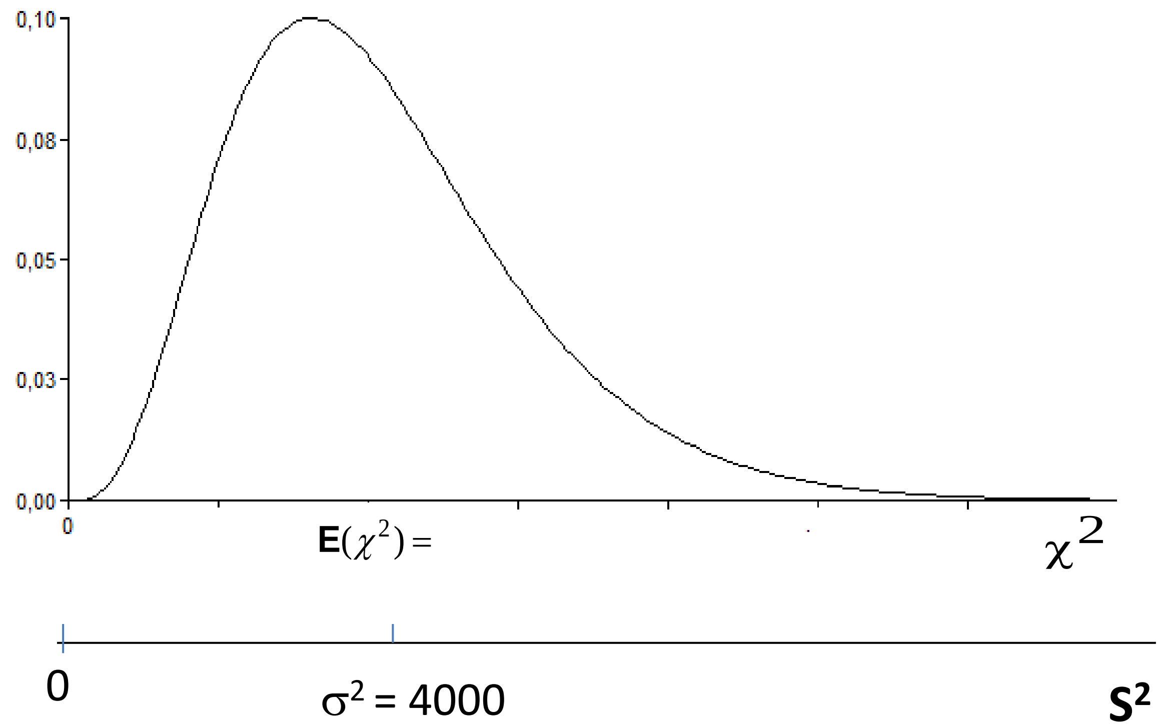
Como **Región crítica**, por lo tanto **H_0.**

Conclusión:

Con un nivel de significación de 0.01, n**o tengo evidencias suficientes para afirmar que la varianza de los salarios docentes difiera de 4000 dólares ^{2}**

. La prueba es no **significativa.**

b) **Enfoque P**



Planteo:
H_0: σ^2 =
H_1: σ^2

Estadístico de prueba bajo H_0:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(\ \ -1)\ \ \ ^2}{} = \chi^2_{n-1} =$$

El valor del estadístico es:

$$\chi^2_{obs} = \frac{\cdot}{} =$$

Datos: n = y s =

valor P = P($X^{2} \geq X^{2\ obs}$) = **2 * P(**$X^{2} \geq$ **) =**

Como **P =** **0.05** , por lo tanto **Rechazo H_0.**

<u>Conclusión:</u>

Con

. La prueba es **significativa.**