Jacqueline Centurión | DNI : 42830354 | HOJA Nº 1

LU : 129700 | FECHA 14/12/21

1. Probar que la ec. es exacta y encontrar sus soluciones.

$$(x-2y)\,y' + 2x + y = 0$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$(x-2y)\,dy = (-2x-y)\,dx$$

$$\underbrace{(2x+y)}_{M}dx + \underbrace{(x-2y)}_{N}dy = 0$$

- Condición necesaria y suficiente para que la ecuación sea exacta $\Rightarrow \boxed{M_y = N_x}$

$M_y = u_{xy} = 1$
$N_x = u_{yx} = 1$
} son iguales, ∴ la ecuación es exacta.

- Busco las sol. =

$$u(x,y) = \int M\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int (2x+y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = x^2 + yx + k(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = N} \Rightarrow \cancel{x} + k'(y) = \cancel{x} - 2y \rightarrow \frac{dk}{dy} = -2y$$

$$k(y) = \int -2y\,dy \rightarrow \boxed{k(y) = -y^2 + C}$$

$$\boxed{u(x,y) = x^2 + yx - y^2 + C}$$

2. $\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - y_2 \\ y_2' = -5y_1 + \alpha y_2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ -5 & \alpha \end{bmatrix}$

• Para que el sistema tenga soluciones estables debo analizar los casos de equilibrio:

• Busco autovalores y autovectores asociados a la matriz "A" ($AX = \lambda X$)

* Autovalores

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\left| \begin{bmatrix} \alpha-\lambda & -1 \\ -5 & \alpha-\lambda \end{bmatrix} \right| = (\alpha-\lambda).(\alpha-\lambda) - 5 = 0 \rightarrow (\alpha-\lambda)^2 - 5 = 0$

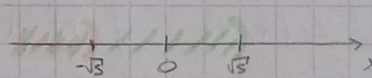
$\alpha - \lambda = \pm\sqrt{5} \rightarrow \boxed{\lambda = \alpha \pm \sqrt{5}}$

CASOS DE EQUILIBRIO

I) $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$ (NODO)

• si $\lambda_1 < 0 \rightarrow \alpha + \sqrt{5} < 0 \rightarrow \alpha < -\sqrt{5}$

• si $\lambda_2 < 0 \rightarrow \alpha - \sqrt{5} < 0 \rightarrow \alpha < \sqrt{5}$



si $\alpha < -\sqrt{5}$ entonces λ_1 y λ_2 son reales negativos y se trata de un nodo estable

II) λ_1 y λ_2 son imaginarios puros (centro) estable

• "λ" debe ser de la forma:

$\lambda = p \pm iq$

(con $p = 0$ y $q \neq 0$)

si $p = 0 \rightarrow \alpha = 0$ y $\therefore \lambda = \pm\sqrt{5}$ NO son valores imaginarios puros.

DESCARTO ESTE CASO

III) λ_1 y λ_2 son números complejos no imaginarios puros con parte real negativa (foco estable)

Deben ser de la forma =

$\lambda = p \pm i q$ $\quad\quad$ $p < 0$, $q \neq 0$

De este caso no obtengo soluciones ya que el valor de "λ" obtenido ($\lambda = 4 \pm \sqrt{5}$) es $\neq$ a la forma propuesta para un foco estable. ($\lambda \in \mathbb{R}$)

3. $y'' + y = \cos(x)$ $\quad\quad$ $y(0) = 1$ $\quad$ $y'(0) = 0$

• Primero busco y_h (sol de la ec. homogénea)

$y'' + y = 0$ $\quad\quad$ Propongo: $y = e^{\lambda x}$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}$

Reemplazo =

$\lambda^2 . e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm i}$

$$\boxed{y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)}$$

• Ahora busco y_p (sol particular)

Utilizo el método de coeficientes indeterminados.

Propongo: $y_p = A . \cos(x) + B \operatorname{sen}(x)$

como $y_p = y_h$ multiplico $y_p . x$

$y_p = A\, x.\cos(x) + B\, x\, sen(x)$

$y_p' = A[\cos(x) - x.\, sen(x)] + B[sen(x) + x.\cos(x)]$

$y_p'' = -A\, sen(x) - A.[sen(x) + x.\cos(x)] + B.\cos(x) + B[\cos(x) - x.\, sen(x)]$

$\hookrightarrow -2A\, sen(x) - A\, x\cos(x) + 2B\cos(x) - Bx\, sen(x)$

Reemplazo =

$y'' + y = \cos(x)$

$-2A\, sen(x) + 2B\cos(x) \cancel{-Ax\cos(x)} \cancel{-Bx\, sen(x)} \cancel{+Ax\cos(x)} \cancel{+Bx\, sen(x)} = \cos(x)$

$-2A\, sen(x) + 2B\cos(x) = \cos(x)$

$$\begin{cases} \cdot\ -2A = 0 \rightarrow A = 0 \\ \cdot\ 2B = 1 \rightarrow B = 1/2 \end{cases}$$

Entonces =

$$y_p = \frac{1}{2}.x.\, sen(x)$$

Luego =

$y = y_h + y_p = C_1.\cos(x) + C_2.\, sen(x) + \frac{1}{2}x.\, sen(x)$

- Utilizo las condiciones iniciales =

I) $y(0) = 1$

$C_1.\overbrace{\cos(0)}^{1} + C_2.\, \cancel{sen(0)}^{0} = 1 \rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

II) $y'(0) = 0$

$y'(x) = -sen(x) + C_2.\cos(x) + \frac{1}{2}[sen(x) + x.\cos(x)]$

$y'(0) = 0 \rightarrow C_2.\underbrace{\cos(0)}_{1} = 0 \rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}.x.\, sen(x) + \cos(x)}$$

4) OBTENER EL DESARROLLO DE FOURIER DE

$$f(x) = sen(x) . cos(x) \quad , \; x \in [-\pi, \pi]$$

PERÍODO $\rightarrow T = 2\pi$

FRECUENCIA $\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . cos(nx) + b_n . sen(nx)$$

• Busco los coeficientes =

$$- a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen(x) . cos(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} . \left[\frac{sen^2(x)}{2} + C \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \boxed{0}$$

$$- a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen(x) . cos(x) . cos(nx) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} . \left[\frac{cos((n-2)x)}{4(n-2)} - \frac{cos((n+2)x)}{4(n+2)} + C \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \boxed{0}$$

Resuelvo con la computadora

$$- b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen(x) . cos(x) . sen(nx) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{sen((n-2)x)}{4(n-2)} - \frac{sen((n+2)x)}{4(n+2)} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{4\pi} . \left[\frac{sen(nx-2x).(n+2) - sen(nx+2x).(n-2)}{n^2-4} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{4\pi} . \frac{1}{n^2-4} . \Big[\big(sen(n\pi - 2\pi)(n+2) - sen(n\pi + 2\pi)(n-2)\big) -$$

$$\big(sen(-n\pi + 2\pi)(n+2) - sen(-n\pi - 2\pi)(n-2)\big) \Big]$$

$$b_n = \frac{2 . sen(n\pi)}{n^2-4}$$

Reemplazo =

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}(n\pi)}{n^2-4} \cdot \text{sen}(nx)$$

HOJA Nº 7

FECHA

(5) Decir si $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + i\left(x^2y - \frac{y^3}{3}\right)$

es o no holomorfa

como función de la variable compleja $z = x + iy$

Por el teorema: Si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de variable $\in \mathbb{R}$

tienen derivadas parciales continuas y

satisfacen las ecuaciones de Cauchy-

Riemann en algún dominio "D"

Entonces $f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$ es holomorfa.

- $u(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ $\qquad$ $v = x^2y - \frac{y^3}{3}$

$u_x = x^2 - y^2$ $\qquad$ $v_x = 2xy$

$u_y = -2yx$ $\qquad$ $v_y = x^2 - y^2$

Derivadas parciales continuas ✓

- Ecuaciones de Cauchy - Riemann

$u_x = v_y$ $\qquad$ $u_y = -v_x$

$x^2 - y^2 = x^2 - y^2$ ✓ $\qquad$ $-2xy = -2xy$ ✓.

La función es holomorfa.

HOJA N° 8

FECHA

(6) ¿Como cambia el ancho del intervalo de confianza para la media, con σ conocida, si se duplica el tamaño de la muestra?

El ancho del intervalo de confianza permite estimar el grado de imprecisión de la estimación. Es inversamente proporcional al tamaño de la muestra.

Al duplicar la muestra hay mayor información y más precisión en la estimación, por lo tanto se reduce el ancho del intervalo.

. Jacqueline Centurión

. L.U. = 129700

. e-mail: centurionjacqueline@outlook.com

Escaneado con CamScanner