FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Examen Final **2018**

Nombre: ....Nota: ....

LU: .... e-mail: ....Nro de hojas: ....

¿Entregó Nota de Aplicación? Sí / No

1. Sea $f(x)=e^{-x}$, $0<x\le\pi$, y sea $f_\pi(x)$ la extensión de período π de $f(x)$. [Sug. grafique ambas funciones]
   - i) Obtenga la serie de Fourier compleja para $f_\pi(x)$ y grafique la *función suma*.

     [recuerde: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}}$, con $\gamma_n=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$]

   - ii) Calcule las sumas $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\gamma_n$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\gamma_n|^2$.
   - iii) Encuentre $F_\pi(s)=\mathcal{L}\left(f_\pi(x)\right)_{(s)}$, es decir la transformada de Laplace de f_π. Analice los ceros de $F_\pi(s)$.

---

2. Sea $f(z)$ una función analítica en todos los puntos de una curva suave C que une los puntos z_1 y z_2. Indique si las siguientes afirmaciones son siempre ciertas. Justifique (utilice enunciados de teoremas o considere alguna de las funciones $f(z)=\overline{z}$, $f(z)=\frac{1}{z}$, $f(z)=z^2$ como contraejemplos)

i) $f(z)$ verifica las ecuaciones de Cauchy Riemann sobre la curva *C*.

ii) Existe un dominio *D* (abierto y conexo), donde *f* es analítica y contiene a la curva *C*. Además *D* es simplemente conexo.

iii) Si $z_1=z_2$, entonces $\int_C f(z)dz=0$.

iv) Si $z_1=z_2$ y *f* tiene primitiva sobre *C*, entonces $\int_C f(z)dz=0$.

---

3. Sea $g(t)=\begin{cases} t \text{ si } t\ge 1\\ 0 \text{ si } t<1\end{cases}$, considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}+4y(t)=g(t)$, con condiciones iniciales nulas ($y(0)=0$), y responda los siguientes puntos:

i) Encuentre dos funciones $G(s)$ e $Y(s)$ analíticas en $\mathrm{Re}(s)>0$ y que sean las respectivas transformadas de Laplace: $G(s)=\mathcal{L}\left(g(t)\right)_{(s)}$ e $Y(s)=\mathcal{L}\left(y(t)\right)_{(s)}$ en $\mathrm{Re}(s)>0$.

ii) ¿ Puede extender el dominio de $G(s)$ e $Y(s)$ para que sean analíticas en todo el plano? Evalúe la integral $\int_{|s|=5}(\mathrm{Y}(s)+G(s))ds$.

iii) Encuentre la solución de la ecuación diferencial $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right)$ y luego determine una expresión para $y'(t)$, e $y''(t)$, si es necesario utilice escalones y funciones impulsivas. Compruebe si verifican la ecuación diferencial.

---

4. Sea *C* el círculo $|z|=2$ recorrido en sentido antihorario, y sea $X(z)=\frac{2+5i\,z^{-1}}{1+i\,z^{-1}}$ una función de variable compleja.

i) Encuentre una sucesión x_n que tenga a $X(z)$ como su transformada Zeta. Indique la región de convergencia.

ii) ¿Cuál es la imagen de *C* al aplicarle la transformación $X(z)$.¿Es conforme allí?¿cuál es la variación del argumento de $X(z)$ sobre la curva *C*?