Análisis Matemático III

Segundo Examen Parcial – 03/07/2025

Apellido y nombres: ....
L.U.Nº: ....

1. Mostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}$ converge uniformemente en $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

2. (a) Hallar el desarrollo de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$, alrededor de $z_0 = -2i$ que converge en $z = i$. Indicar el anillo de convergencia.
   (b) A partir de este desarrollo, hallar el valor de la integral:
   $$\int_{\partial B_3(-2i)} \frac{(z+2i)^4}{z(z^2+4)}\, dz.$$

3. Determinar y clasificar todas las singularidades de las siguientes funciones. Si la singularidad es evitable, definir la función de manera tal que en ese punto resulte holomorfa. Calcular los residuos en cada singularidad.
   (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z) - z}{z(z-\pi)}$
   (b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z+1}} - 1}{(z+1)^3}$

4. Hallar la imagen del conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 2\operatorname{Re} z - 1\}$ bajo la transformación $w = -i(2z-1)$.

5. Sea $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \leq -1 \text{ ó } 1 < x \leq 2, \\ 1, & -1 < x \leq 1. \end{cases}$
   (a) Obtener la serie de Fourier.
   (b) Calcular la suma de las siguientes series:
   i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ **ii.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}$

6. (a) Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:
   $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx.$$
   (b) Calcular el valor de la siguiente integral, utilizando la función Gamma o Beta:
   $$\int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt[3]{8-(2t)^2}\, dt.$$