Primer Parcial de Álgebra y Geometría

(7 de Febrero de 2023)

Tema I: Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -3x + z = 0 \\ 5x - y + 12z = 6 \end{cases}$$

si es posible agregar una ecuación de modo que **(a)** tenga solución única **(b)** tenga infinitas soluciones **(c)** no tenga solución. En cada caso justifique la elección.

Solución. Es casi inmediato obtener una solución general del sistema dado, el cual es compatible indeterminado

$$\begin{cases} z = 3x \\ y = 41x - 6 \end{cases}$$

Para dar una respuesta a **(a)** basta con agregar una ecuación $x = k$ para un $k \in \mathbb{R}$ fijo. (O bien una ecuación $z = k$ si se dejó la variable z libre o independiente en la solución general.)
Si no sabían resolverlo así probablemente hayan tirado una ecuación "aleatoriamente" y resuelto mediante proceso de Gauss (Gauss-Jordan). Si bien esto lleva más trabajo es aceptable este tipo de solución siempre que hayan triangulado-diagonalizado bien la matriz de coeficientes.

Para responder **(b)** bastaba con agregar una ecuación que sea combinación lineal de las dos precedentes (*establecido antes que el sistema dado es compatible indeterminado!!!*)
Como en el apartado anterior puede que hayan agregado ecuaciones "al voleo". La solución es aceptable siempre que justifiquen agregar tal ecuación mediante una reducción *a la* Gauss (Gauss-Jordan).

En el apartado **(c)**, basta con agregar una ecuación que donde sus coeficientes sean iguales a los de una de las ecuaciones del sistema original, mientras que el término independiente sea distinto.
Nuevamente si hicieron una elección aleatoria deben justificar necesariamente por Gauss (Gauss-Jordan).

Ejercicio 2. Indique para que valores de α el sistema asociado a la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 0 & \alpha + 2 \\ 0 & 0 & 3 - \alpha & -1 \end{array}\right)$$

es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. Justifique su respuesta.

Solución. Sabemos que $R(A) \leqq R(A|B)$. Para dar respuesta al problema debemos determinar, en virtud de la regla de Rouche-Frobenius, para que valores de α se dan las situaciones $R(A) < R(A|B)$ y $R(A) = R(A|B)$ y en este último caso analizar cuando $R(A) = 3$ y $R(A) < 3$.

Los valores que interesan son aquellos que hacen cero las expresiones donde se encuentra α ya que en esos casos es cuando pueden disminuir los rangos de las matrices de coeficientes y la ampliada.

Tales valores son $3, -2, 2$. Los pueden sacar "a ojo", o sea no hace falta que se pongan a resolver las ecuaciones que son bastante simples.

Caso 1: $\alpha = 3$. En esta caso $R(A) = 2 < R(A|B)$, que por R-F se sigue que el sistema es incompatible.
También pueden decir que la última ecuación es absurda porque nos da $0 = -1$ y por tanto el sistema es incompatible.
Se admiten las dos respuestas.

Caso 2: $\alpha = 2$. Este caso es análogo al anterior.

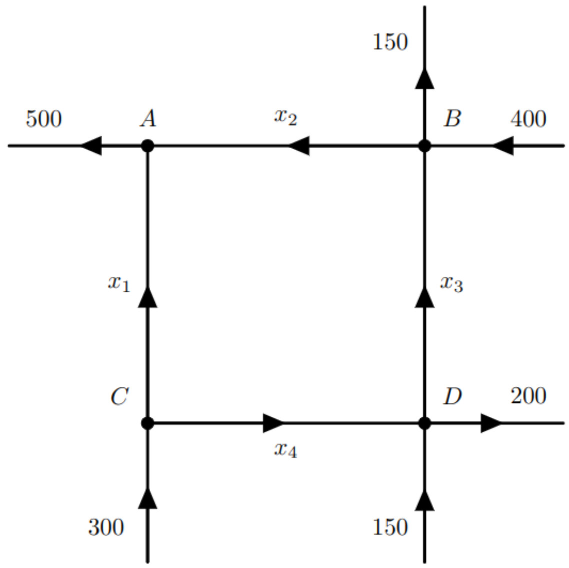
Caso 3: $\alpha = -2$. En este caso $R(A) = 2 = R(A|B)$ por lo tanto el sistema es compatible, como el rango de A es menor que el número de incógnitas es indeterminado.
También pueden decir que al anularse una ecuación en un sistema de tres incógnitas necesariamente es indeterminado.
Otra forma es que planteen el nuevo sistema y lo resuelvan, o sea que encuentren la solución general a partir de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

y con eso muestren que es compatible indeterminado.
Las tres respuestas son admisibles.

Para el resto de valores reales $\alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 2, 3\}$ el sistema es compatible determinado. Ya esta reducido *a la* Gauss-Jordan, no hay nada que demostrar. Pero es necesario que digan *para que valores esto pasa!!!*

Ejercicio 3. El siguiente diagrama representa una red de tráfico vehicular. La dirección y sentido del flujo de tránsito en cada tramo se indica con flechas etiquetadas con la cantidad de vehículos que circulan por hora.



Sabiendo que se verifica la Ley de Conservación del Flujo que establece que *"en cada nodo, el flujo que entra es igual al flujo que sale"*:

(a) Plantear la situación mediante un sistema de ecuaciones lineales, definiendo previamente las variables que intervienen.

(b) Calcular los flujos posibles entre cada par de nodos indicando en cada caso sus valores mínimos y máximos.

(c.1) ¿Es posible cortar el tránsito que se dirige desde el nodo B hasta el A?

(c.2) Si el tránsito desde C hasta D debe ser reducido para una construcción ¿cuál es el mínimo flujo requerido para que continúe el tránsito en todas las calles?

Solución. El sistema asociado al sistema es el siguiente

$$\begin{cases} A: & x_1 + x_2 = 500 \\ B: & x_3 + 400 = x_2 + 150 \\ C: & x_1 + x_4 = 300 \\ D: & x_4 + 150 = x_3 + 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_2 - x_3 = 250 \\ x_1 + x_4 = 300 \\ -x_3 + x_4 = 50 \end{cases}$$

Reduciendo la matriz asociada al sistema se debe obtener un sistema compatible indeterminado, siendo una de sus soluciones con x_4 como variable independiente, la siguiente

$$\begin{cases} x_1 = 300 - x_4 \\ x_2 = 200 + x_4 \\ x_3 = x_4 - 50 \end{cases}$$

De la solución general se sigue que

$$x_4 \in \mathbb{N}_0, \quad 50 \leq x_4 \leq 300$$

así

$$\begin{aligned} -300 &\leq -x_4 \leq -50 \\ 0 \leq 300 - x_4 &\leq 300 - 50 \\ 0 \leq 300 - x_4 &\leq 250 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 50 &\leq x_4 \leq 300 \\ 0 \leq x_4 - 50 &\leq 300 - 50 \\ 0 \leq x_4 - 50 &\leq 250 \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$x_1 \in \mathbb{N}_0, \quad \boxed{0 \leq x_1 \leq 250} \qquad\qquad x_3 \in \mathbb{N}_0, \quad \boxed{0 \leq x_3 \leq 250}$$

Para acotar la última variable

$$\begin{aligned} -250 &\leq -x_1 \leq 0 \\ 500 - 250 \leq 500 - x_1 &\leq 500 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &\leq x_3 \leq 250 \\ 250 \leq 250 + x_3 &\leq 250 + 250 \end{aligned}$$

o sea que

$$x_2 \in \mathbb{N}_0, \quad 250 \leq x_2 \leq 500$$

(b) La respuesta correcta es **no**, ya que para que el sistema sea consistente, el tránsito mínimo debe ser 250 en la esa calle cuyo valor está determinado por la variable x_2.
Si tienen algún error de cálculo en el apartado (a) del valor mínimo de x_2, se acepta como válida la respuesta que den si concuerda con el mínimo que ellos hallaron.

(c) El valor mínimo que puede tomar x_4, la variable que representa el tráfico en esa calle, es 50 pero no podemos elegir ese valor ya que en tal caso se anularía el transito desde D hasta B y no queremos que eso pase. Para que haya tráfico en todas las calles el valor mínimo que podemos tomar es $x_4 = 51$ (recordar que son números enteros)
Como en el apartado anterior si tienen mal las cotas por que plantearon mal el sistema o porque lo resolvieron mal, se acepta como válida la respuesta que concuerde con las cotas que hayan establecido.

Tema II: Matrices

Ejercicio 4. (a). Indicar si la matriz $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pertenece al subespacio

$$S = \overline{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right\}} \quad \text{de } \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Solución. La matriz dada pertenece al subespacio S si existe una (no necesariamente úninca) solución para la ecuación matricial

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema en forma matricial asociado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \times(1) \underset{F_4-(-1)\cdot F_1 \to F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \times(2)$$

$$\underset{F_4-(-2)\cdot F_2 \to F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \times(-1) \underset{F_1-1\cdot F_2 \to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde resulta que el sistema tiene solución siendo

$$\alpha = -3 \qquad\qquad \beta = 1$$

(b). Encuentren la forma general del espacio S. Se trata de encontrar todas las matrices que $\begin{bmatrix} x & y\\ z & w \end{bmatrix}$ para las cuales la siguiente ecuación matricial tiene solución

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y\\ z & w \end{bmatrix}$$

Reducimos el sistema en forma matricial asociado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 1 & z\\ -1 & -3 & w \end{array}\right) \times(1) \underset{F_4-(-1)\cdot F_1 \to F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & -2 & w+x \end{array}\right) \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & y\\ 0 & -2 & w+x \end{array}\right) \times(2)$$

$$\underset{F_4-(-2)\cdot F_2 \to F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & y\\ 0 & 0 & w+x+2z \end{array}\right)$$

tal sistema tendrá solución (no necesariamente única) cuando sea compatible. Esta condición se cumple cuando

$$y = 0 \qquad\qquad x + 2z + w = 0$$

De modo que la forma general del subespacio es la siguiente

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y\\ z & w \end{bmatrix} \ : \ y = 0,\ x + 2z + w = 0 \right\}$$

(c). Hallar el espacio generado por el siguiente conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Como $\left\{\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\} \subset S$, resulta que el subespacio buscado es el mismo S.

(d). Hallar una base para el siguiente subespacio (justifique que el conjunto hallado es una base) $\{A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) :\ a_{13} = 3a_{11} + 5a_{22},\ a_{12} = 0,\ a_{23} = -a_{11} + a_{22},\ a_{21} = 0\}$

Reemplazamos en una matriz arbitraria de A las ecuaciones que definen al subespacio

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 3a_{11}+5a_{22}\\ 0 & a_{22} & -a_{11}+a_{22}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 3a_{11}\\ 0 & 0 & -a_{11}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 5a_{22}\\ 0 & a_{22} & a_{22}\end{bmatrix}\\
&= a_{11}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como los escalares a_{11} y a_{22} son arbitrarios se sigue que

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

es la base del subespacio A dado que las matrices son independientes.

Ejercicio 5. Hallar, si es posible, la matriz X de las siguientes ecuaciones, siendo $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

(a) $AXA^{-1} \ = \ (CA^T)^T + B$

$$\begin{aligned}
AXA^{-1} &= (CA^T)^T + B\\
AXA^{-1} &= AC^T + B\\
X &= A^{-1}(AC^T + B)A\\
X &= (C^T + A^{-1}B)A \qquad\qquad A^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/4 & 1/4\end{bmatrix}\\
X &= \begin{bmatrix}2 & 0\\ -9/2 & 7\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b)$AX \ = \ 3C^TB - XA$

$$\begin{aligned}
AX &= 3C^TB - XA\\
AX + XA &= 3C^TB
\end{aligned}$$

No es posible despejar X.

(c) $CX + C = BX$

$$\begin{aligned}
CX + C &= BX\\
CX - BX &= -C\\
(C - B)X &= -C\\
X &= (C - B)^{-1}(-C)
\end{aligned}$$

Será posible siempre que exista la inversa de la matriz $C - B$.

$$(C-B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tema III: Vectores Libres

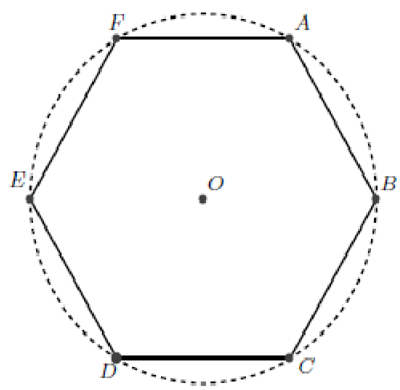
Ejercicio 6. En cada uno de los siguientes items justifique la elección de los conjuntos de vectores libres.

(i). Dibujar un conjunto de vectores libres que genere E_2 y no sea base.

(ii). Dibujar un conjunto de vectores libres que sea linealmente independiente y no sea base.

(iii). Dibujar un conjunto de vectores que sea base en E_2.

Ejercicio 7. Considerar el siguiente hexágono regular. Recordar que un hexágono regular se puede inscribir en una circunferencia. Además los cuadriláteros $EFAO$, $DEOC$, $EABD$ y $OABC$ son paralelogramos.



(a) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

(i). $\vec{CB} \in \overline{\{\vec{AD}\}}$

(ii). $\{\vec{AE}, \frac{1}{2}\vec{DB}\}$ es una base de E_2

(iii). $\vec{DE} - \vec{FA}$ y $\vec{EC}$ son equipolentes.

(b) Calcular, si es posible, $\left\| 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AF} \right\|$.

(c) Sea $B = \left\{ \overrightarrow{u} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{t} = \overrightarrow{AD} \right\}$ una base de E_2.

(c.1) Escribir, si es posible, al vector $\overrightarrow{AF}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{t}$

(c.2) Graficar $[\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Tema IV: Algebrización de vectores en $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 8. Dados los puntos A, B y C en $\mathbb{R}^2$, en cada uno de los siguientes items hallar, cuando sea posible **analíticamente** un punto D de manera que los cuatro sean vértices de un paralelogramo. Si no es posible hallarlo explique la causa.

(i). $A(-1,-2)$, $B(3,0)$, $C(3/2,-3/4)$ **(ii).** $A(-2,2)$, $B(-1,-1/2)$, $C(3,1)$.

Solución. La posibilidad o imposibilidad de la resolución reside en el hecho de que los tres puntos estén alineados o no. Para averiguar la alineación de los puntos se debe construir dos vectores no nulos, distintos y que no sea uno el opuesto del otro (o sea no considerar $\vec{XY}$ y $\vec{YX}$) por que siempre son paralelos, *andá pa'lla bobo* jaja) con los tres puntos y analizar si son paralelos.

(a). Para cualquier par de vectores no nulos y distintos (y que no sean $\vec{XY}$ y $\vec{YX}$ simultáneamente considerados) que construyan, van a obtener que son paralelos, son muchos casos así que no los voy a enumerar.
Si sólo grafican los puntos y dicen que son paralelos porque están en la misma linea, y sólo lo justifican gráficamente o plantean la recta $y = mx + b$, **NO** se considera la respuesta. Estamos evaluando álgebra de vectores y tienen que responder con esas herramientas, además que se los avisé en *clase, en las dos consultas que dí antes del parcial, y en el parcial mismo se los dije.*
Obviamente que si hacen las cuentas y ponen un gráfico para quedarse "tranqui" de que no hicieron macanas, no hay problema con eso, pero no deben justificar solamente con el gráfico.

(b). En este caso los puntos no están alineados. Si toman $\vec{u} = \vec{AB} = (2,-5/2)$ y $\vec{v} = \vec{AC} = (5,-1)$, y plantean la ecuación $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ se obtiene fácilmente que la ecuación vectorial no tiene solución. Para hallar el tercer punto, eligen $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (6,-7/2)$ luego encuentran el punto final del vector equipolente a w cuyo punto inicial es A, el extremo D de ese vector es el punto buscado

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \vec{OD} - \vec{OA} \\
(6,-7/2) &= \vec{OD} - (-2,2) \\
(6,-7/2) + (-2,2) &= \vec{OD} \\
(4,-3/2) &= \vec{OD}
\end{aligned}$$

Así $D(4,-3/2)$ es el punto buscado.

El punto D que completa los vértices del paralelogramo no es único.
Si eligen $\vec{u} = \vec{BA} = (-1,5/2)$ y $\vec{v} = \vec{BC} = (4,3/2)$, el punto que van a encontrar es $D = (2,7/2)$.
Si eligen $\vec{u} = \vec{CA} = (-5,1)$ y $\vec{v} = \vec{CB} = (-4,-3/2)$, el punto que van a encontrar es $D = (-6,1/2)$.

Si hay errores de cuentas pero las ecuaciones para hallar extremos dado el origen están bien planteadas se considera el ejercicio.

No se considera si sólo grafican y hacen regla del paralelogramo para hallarlo graficamente, porque esa es una técnica propia de vectores libres, que no es lo que estamos evaluando y yo les avisé *más de una vez que no se considera en este tema este tipo de resolución.*

Ejercicio 9. Sean $B = \{\vec{u}_1 = (1,0), \vec{u}_2 = (-1,2)\}$ y $D = \{\vec{v}_1 = (3,1), \vec{v}_2 = (-4,2)\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(1). Encuentre las matrices de cambio de base $[B]_C$, $[D]_C$, $[B]_D$ y $[D]_B$ donde C denota la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución. De la propia definición de matriz de cambio de base automáticamente tienen que

$$[B]_C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad [D]_C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para obtener las otras matrices tienen dos caminos. **Primero** haciendo uso de las fórmulas

$$[B]_D = [C]_D \cdot [B]_C = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/10 & 7/10 \end{bmatrix} \qquad [D]_B = [C]_B \cdot [D]_C = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

que para aplicarlas necesitan conocer $[C]_D$ y $[C]_B$. Para obtenerla pueden usar lo siguiente

$$[C]_D = ([D]_C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \qquad [C]_B = ([B]_C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

buscando la inversa a la *Gauss-Jordan, NO por "adjunta y determinante"*, o bien **(segundo camino)** plantear los sistemas

$$\check{\imath} = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + a_{21} \cdot \vec{v}_2$$
$$\check{\jmath} = a_{21} \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2$$

donde la solución sería

$$[C]_D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/10 & 3/10 \end{bmatrix}$$

y análogamente con $[C]_B$. Cualquiera de las dos formas está bien, hallar inversas o plantear los sistemas. De igual forma podrían haber usado este método **(segundo camino)** para hallar $[B]_D$ y $[D]_B$ planteando, por ejemplo para $[B]_D$ el siguiente sistema

$$\vec{u}_1 = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + a_{21} \cdot \vec{v}_2$$
$$\vec{u}_2 = a_{21} \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2$$

obteniendo así

$$[B]_D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ -1/10 & 7/10 \end{bmatrix}$$

en forma análoga para $[D]_B$. Cualquiera de los métodos expuestos se aceptan como válidos.

- Los errores de cuentas se pueden pasar por alto (hasta cierto punto), salvo que sean errores **groseros** al aplicar operaciones elementales al momento de resolver los sistemas planteados, tanto para hallar inversas como para los otros sistemas.

(2). Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ tales que: $\vec{a} = 8 \cdot \vec{u}_1 - 2 \cdot \vec{u}_2$, $[\vec{r}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\vec{s}]_D = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = -4 \cdot \check{\jmath} + \check{\imath}$, $[\vec{u} + \vec{w}]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(2.1) ¿Son $\vec{r}$ y $\vec{s}$ vectores paralelos?

Solución. Lo que se quiere evaluar en este ejercicio es el siguiente concepto "dos vectores son paralelos sii sus matrices de coordenadas en la misma base son paralelas (o sea una múltiplo escalar de la otra)". Basta con hallar las matrices de coordenadas de los vectores dados en una misma base, cualquiera que sea. Enumero distintas formas

1ra Hallar las coordenadas de $\vec{r}$ en la base D

$$[\vec{r}]_D = [B]_D \cdot [\vec{r}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

2da Hallar las coordenadas de $\vec{s}$ en la base B

$$[\vec{s}]_B = [D]_B \cdot [\vec{s}]_D = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3ra Pasar las coordenadas de ambos vectores a la canónica

$$[\vec{r}]_C = [B]_C \cdot [\vec{r}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [\vec{s}]_C = [D]_C \cdot [\vec{s}]_D = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4ta - aceptable Usar la definición de coordenadas y sacar las cuentas siguientes $\vec{r} = 2 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (1, 2)$ y $\vec{s} = -2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (-2, -4)$. Esta forma es equivalente a la 3ra.

(2.2) Hallar $[-5 \cdot \vec{a}]_D$.

Por como lo hemos definido al vector $\vec{a}$, tenemos que

$$[\vec{a}]_B = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Forma corta:

$$[-5 \cdot \vec{a}]_D = (-5)[\vec{a}]_D = (-5)[B]_D \cdot [\vec{a}]_B = (-5) \cdot \begin{bmatrix} 2/5 \\ -11/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Forma larga (problablemente alguien haya realizado este camino). Hallar las componentes de $\vec{a}$ en la canónica, haciendo $\vec{a} = 8\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ y luego multiplicar por (-5) y luego pasar a la base D. Debería llegar a lo mismo. Cualquiera de las dos formas está bien planteada.

(2.3) Hallar la matriz de coordenadas de $\vec{w}$ en la base B.

Teniendo en cuenta que $[\vec{u}]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

Forma corta.

$$\begin{aligned}
[\vec{w}]_B &= [(\vec{u}+\vec{w}) + (-1)\vec{u}]_B \\
&= [(\vec{u}+\vec{w})]_B + (-1)[\vec{u}]_B \\
&= [(\vec{u}+\vec{w})]_B + (-1)[C]_B \cdot [\vec{u}]_C \\
&= \begin{bmatrix} -3, 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Forma larga: Pasar $\vec{u}+\vec{w}$ a la base canónica

$$[\vec{u}+\vec{w}]_C = [B]_C \cdot [\vec{u}+\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} -6, 4 \end{bmatrix}$$

luego obtener $\vec{w} = (-6,4) - (1,-4) = (-7,8)$ y hallar sus coordenadas en B.
Otra forma: que pasen todo a la base D y luego cambien a B, es una posibilidad pero no creo que lo hagan.