FINAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRíA (14 de julio de 2022)

1) (a) Hallar todos los $z \in C$ tales que $z^3 + \dfrac{1-i}{1+i} = -1$

(b) Representar en el plano complejo todos los $z \in C$ tales que : $\begin{cases} Re\left(z - \dfrac{4}{i}\right) < 1 \\ ||z - 1 + 2i^{30}|| \leq \|5i\| \end{cases}$

2) (a) Hallar, si es posible, la ecuación de:

i. un plano α que contenga a la recta $L : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ z - 3y = 2 \end{cases}$ y a la recta determinada por $A(-2, 1, 1)$ y $B(0, 5, 1)$.

ii. una recta perpendicular al plano $\alpha : 3x - y + z + 1 = 0$ que corte a la recta L del inciso anterior.

(b) Indicar, en caso de existir, si el plano y/o la recta de los incisos anteriores son únicos.

3) Sea $T : R^3 \longrightarrow R^3$ la aplicación lineal definida por $T((x, y, z)) = (x+2y-2z, bx+2y+3z, 5z)$, $b \in R$. Hallar, si es posible, los valores de reales de b de modo que:

(a) 7 sea un autovalor de T.

(b) $(2, 3, -1)$ sea autovector de T.

(c) T sea una transformación lineal biyectiva.

(d) dim Nuc $T = 1$.

4) Sea $T : R^3 \to R^3$ la TL que a cada punto del espacio le hace corresponder su proyección sobre la recta $L : (x, y, z) = \lambda.(-1, 2, 0),\ \lambda \in R$.

(a) Indicar los autovalores reales de T y sus correspondientes autovectores asociados.

(b) Hallar, si es posible, una base de R^3 formada por autovectores.

(c) Indicar, sin hacer cuentas, una matriz que represente a dicha TL indicando claramente las bases involucradas en la TL asociada a dicha matriz.

6) Hallar un sistema de coordenadas en el cual la cónica $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 6x - 10y - 9 = 0$ tenga forma normal. Dibujar claramente ambos sistemas de referencias indicando claramente sus bases asociadas.

7) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Los vectores $(\overrightarrow{u})_B = (5, -3)$ y $(\overrightarrow{r})_B = (3, 5)$ son perpendiculares para cualquier base B.

(b) La transformación lineal definida por $g((x, y)) = (2x - y, 5y)$ transforma el eje Y en un vector paralelo a $\overrightarrow{z} = (100, -500)$.

(c) $L : (x, y) = (3, 2) + k(4, -2), k \in R$ es la directriz de una parábola con foco en $F(2, -1)$ y vértice en $V(3, 5)$.

(d) La ecuación $-3x^2 + 2x - y^2 + 3 = 0$ tiene por gráfica una elipse.

(e) Sea $B = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\,(0, 1, -1)\}$ y $(O, X'Y'Z')$ el sistema asociado a la base B. La ecuación $3x' - 2y' + z' = 0$ en el sistema $(O, X'Y'Z')$ representa el mismo plano que la ecuación $2x + 5y - z = 0$ en el sistema (O, XYZ) asociado a la base canónica.

(f) Si $T : R^2 \to R^2$ es una T.L. inyectiva entonces T transforma un conjunto linealmente independiente de R^2 en un conjunto linealmente independiente de R^2.

(g) Si $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ son linealmente independientes entonces $\vec{w_1} = \vec{b_1} - 2\vec{b_2}$ y $\vec{w_2} = -2\vec{b_1}$ son linealmente independientes.

(h) Una base del subespacio $S = \{(x, y, z, t) \in R^4 : 2x + y = 0,\ z = 0\}$ es $\{(1, -2, 0, 0), \}$.