CAPÍTULO I: Probabilidad

INTRODUCCIÓN

La **teoría de probabilidades** comienza a partir de una disputa entre jugadores en 1654. Los dos matemáticos que participaron de esta disputa fueron Blaise Pascal y Pierre de Fermat, y su intercambio de correspondencia sentó las bases de la teoría de probabilidades. En 1657 se escribió el primer libro sobre probabilidades que trataba principalmente sobre problemas relacionados con los juegos de azar. En 1812 Pierre de Laplace extendió la teoría de probabilidades a muchos problemas científicos y prácticos. Las aplicaciones más importantes desarrolladas en el siglo XIX fueron: teoría de errores, matemática actuarial y mecánica estadística. En el siglo XX Kolmogorov (1933), llega a una definición axiomática de probabilidad matemáticamente rigurosa que al mismo tiempo permite su aplicación a un amplio espectro de fenómenos.

CONCEPTOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

Como se definió en el capítulo anterior, un **experimento** es cualquier proceso o acción que genera observaciones y que puede ser repetible.

Existen dos tipos de experimentos:

- **Determinísticos (D):** aquellos que repetidos bajo las mismas condiciones dan igual resultado, por lo tanto, son predecibles; por ejemplo los fenómenos físicos o químicos.
- **Aleatorios (E):** aquellos que admiten dos o más resultados posibles, y si bien estos resultados se conocen, no puede predecirse con exactitud cual de ellos va a ocurrir; pueden repetirse bajo condiciones (casi) idénticas.

Los experimentos aleatorios son de interés para la estadística.

Ejemplos:

1. Se lanza un dado y se observa la cara superior.
2. Se registra el tiempo de duración de una lámpara fabricada en una planta.
3. Se tira un par de dados y se anota el resultado de la cara superior de ambos.
4. Un caja compuesta de N válvulas, de las cuales D son defectuosas, se inspecciona tomando una válvula por vez sin volver a colocarla en el lote. Se repite la extracción hasta obtener una defectuosa y se anota el número de extracciones efectuadas.
5. Se registran las tres componentes de velocidad de un satélite orbital en forma continua durante un período de 24 horas.
6. Se cuenta el número de niñas en familias con cinco hijos.
7. Un lote compuesto de N artículos, de los cuales D son defectuosos, se inspecciona tomando un artículo por vez y volviendo a colocarlo en el lote. Se repite la extracción hasta obtener uno defectuoso y se anota el número de extracciones efectuadas.
8. Se hace girar una tómbola cuya aguja puede parar en cualquier punto entre 0 y 1. Se anota el número apuntado por la aguja.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se nota con la letra griega Ω (omega). Según el número de elementos que contenga se clasifica en finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Para cada uno de los ejemplos dados anteriormente, el espacio muestral asociado a cada experimento es el siguiente:

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, finito.
2. $\Omega = [0;+\infty)$ infinito no numerable o continuo.
3. $\Omega = \{ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),...,(3,2),(3,3),...,(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$, finito.
4. $\Omega = \{1,2,3,4,..N\text{-}D+1\}$, finito.
5. $\Omega = \{ (x,y,z) /\ x,y,z \in R \}$, infinito no numerable.
6. $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$, finito.
7. $\Omega = \{1,2,3,4,...\}$, infinito numerable.
8. $\Omega = [0;1)$, infinito no numerable.

Álgebra de eventos

Suceso o evento: se denomina suceso o evento a cualquier subconjunto del espacio muestral Ω. Los eventos se designarán en general con las primeras letras del abecedario en mayúscula: A, B C, ...

- **evento elemental o simple**: es un resultado básico de un experimento; no se puede descomponer en resultados más simples,
- **evento compuesto**: es el suceso formado por más de un evento elemental.

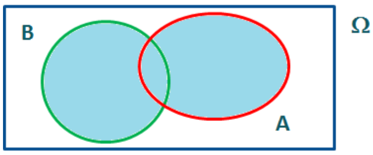
En el ejemplo 1. referido al lanzamiento de un dado se pueden definir:
A = {1}, B = {2}, C = {3}, D = {4}, E = {5}, F = {6} *eventos elementales* y,
G = "sale número par" = {2,4,6}, H = "sale número menor que 3" = {1,2} *eventos compuestos*.

Al espacio muestral Ω se lo denomina **evento** o **suceso seguro** pues ocurre siempre que se realiza el experimento. Se denomina **evento imposible** a aquel que nunca puede ocurrir y se lo designa ∅.

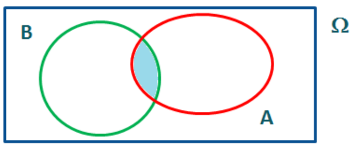
Tanto el espacio muestral como los sucesos son conjuntos, por lo tanto pueden realizarse operaciones propias del álgebra de conjuntos. Gráficamente el espacio muestral y los eventos se suelen representar mediante diagramas de Venn.

Dado un experimento aleatorio E, Ω el espacio muestral asociado, y sean A y B dos eventos cualesquiera, se define:

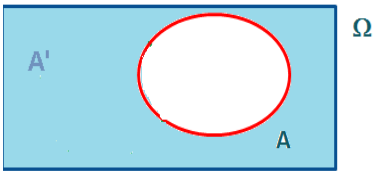
- **evento unión:** al evento que ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B, y se denota $A \cup B$,



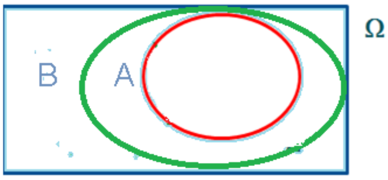
- **evento intersección:** al evento que ocurre cuando ocurren A y B simultáneamente, y se denota $A \cap B$,



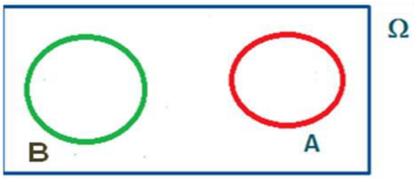
- **evento complemento:** al evento que ocurre cuando no ocurre A, y se denota A^c o $\overline{A}$, es decir, está formado por los elementos del espacio muestral que no pertencen a A, $A \cup A^c = \Omega$.



Un evento A se dice **incluido** o contenido en un evento B si cada vez que ocurre A, ocurre B, es decir, todo elemento de A pertenece a B, y se denota $A \subseteq B$.



Dos eventos o sucesos se dicen **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si la ocurrencia de uno de ellos impide la ocurrencia del otro; o equivalentemente, si su intersección es vacía, $A \cap B = \varnothing$.



Ejemplo:
Considere el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado. Se definen los siguientes eventos asociados al correspondiente espacio muestral Ω:
A = "salga 5"
B = "salga un número mayor que 2"
C = "salga un número múltiplo de 2".
El espacio muestral Ω está formado por 6 eventos elementales, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
$A \cup B = \{3,4,5,6\} = B$.
$A \cup C = \{2,4,5,6\}$.
$A \cap B = \{5\} = A$.
$A \cap C = \varnothing$, por lo tanto A y C son eventos mutuamente excluyentes.
$B^c = \{1,2\}$.

Noción de probabilidad

La probabilidad de un evento es la *medida de ocurrencia del evento*. Dicha medida está dada por un número real comprendido entre 0 y 1. Si es un valor cercano a 0, la ocurrencia del evento es *poco probable* y si es cercano a 1 es *muy probable*.

Vamos a ver dos enfoques que indican cómo asignar probabilidades a los eventos:

Enfoque empírico o frecuentista de probabilidad:

La **probabilidad de un evento aleatorio** se aproxima mediante la frecuencia relativa del evento.

Suponga que se repite n veces un experimento aleatorio en forma independiente y bajo las mismas condiciones, y sea n_A el número de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones. Se denomina frecuencia relativa de A en la secuencia de n repeticiones a,

$$f_{rA} = \frac{n_A}{n}$$

La evidencia empírica muestra que cuando n crece indefinidamente, f_{rA} tiende a estabilizarse alrededor de un número que llamaremos **P(A)** , es decir, $\lim_{n\to\infty} f_{rA} = \mathrm{P(A)}$.

La **probabilidad de un evento aleatorio A**, $\mathrm{P(A)}$, puede aproximarse con la proporción de veces que se observa el evento A (f_{rA}) cuando el experimento se repite un gran número de veces.

Propiedades de la frecuencia relativa:

(1) $f_{rA} = \frac{n_A}{n} \geq 0$

(2) $f_{r\Omega} = \frac{n_\Omega}{n} = \frac{n}{n} = 1$

(3) Si A∩B = ∅ entonces $f_{rA\cup B} = \frac{n_{A\cup B}}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_{rA} + f_{rB}$.

Ejemplo:
En una fábrica de componentes electrónicos para automatización de válvulas en tuberías, se observa que de 2000 componentes, 200 no cumplen las especificaciones.
Se define el evento A = "componente electrónico fuera de especificación", entonces:

$$\mathrm{P(A)} \cong 200/2000 = 0.1$$

Enfoque clásico de probabilidad:
Sea E un experimento aleatorio cuyo espacio muestral Ω tiene n sucesos simples distintos (finito), cada uno con la misma posibilidad de ocurrir, ie, equiprobables. La probabilidad de un evento A puede calcularse contando

$$P(A) = \frac{\text{número de eventos elementales en } A}{\text{número total de eventos elementales en } \Omega} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos posibles}}$$

Este método no necesita experimentación. Si los resultados son igualmente posibles, la probabilidad asignada al evento A no es una aproximación.

Ejemplo:

1. Se selecciona al azar una carta del mazo de 52 cartas (baraja inglesa, cartas de poker),
   a) ¿cuál es la probabilidad de sacar un as?
      A =" la carta es as" P(A) = casos favorables/ casos posibles = 4 / 52.
   b) ¿cuál es la probabilidad de sacar una carta de corazón?
      C =" la carta es corazón" P(C) = casos favorables/ casos posibles = 13 / 52.

2. Si se escoge un número natural entre 1 y 100, tal que cada uno tenga la misma probabilidad de ser elegido, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 5?
   Ω = {1, 2, 3, 4, **5**, 6, 7, 8, 9, **10**, …, **95**, …, **100**}
   Un número es múltiplo de 5 si termina en 0 ó en 5.
   M =" el número es múltiplo de 5", por lo tanto, P(M) = casos favorables / casos posibles = 20 / 100 = 0.2

3. Para abrir una cerradura de combinación se requiere la selección correcta de un conjunto de 4 dígitos en sucesión. Los dígitos se fijan girando el tambor alternativamente en el sentido de las agujas del reloj y en el sentido opuesto. Suponer que no se utiliza un mismo dígito dos veces. ¿cuál es el número total de las posibles combinaciones?
   $V_{10,4} = 10!/(10-4)! = 5040$.
   ¿Cuál es la probabilidad de que la combinación correcta sea un número par?
   P(combinación correcta sea un número par) = casos favorables / casos posibles = $5 \cdot V_{9,3} / V_{10,4}$ $= 5 \cdot 504 / 5040 = 2520/5040 = 0.5$.

En el caso de que el conjunto de resultados elementales posibles sea infinito no contable resulta complicado considerar el conjunto de todos los subconjuntos posibles y de aquí el interés de restringirse a los conjuntos que se obtienen a partir de unos conjuntos básicos por las operaciones de unión e intersección, es decir, una clase de sucesos o subconjuntos $\mathcal{A}$ del Ω tal que verifica:

1) $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2) Para todo $A \in \mathcal{A}$, también $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3) Para toda sucesión de eventos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, de $\mathcal{A}$, se verifica, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Tal clase se denomina *σ- algebra*.

Axiomas de Probabilidad:
Dado un experimento aleatorio y un espacio muestral asociado Ω, con la *σ- algebra* $\mathcal{A}$, a cada evento A se le asociará un número que se notará P(A) y que se llamará probabilidad del evento A. Esta asignación P: $\mathcal{A} \to [0, 1]$, debe satisfacer los siguientes axiomas:

A1) $P(A) \geq 0$, para todo evento $A \in \mathcal{A}$.
A2) $P(\Omega) = 1$
A3) Para toda sucesión de eventos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, se verifica, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Llamaremos al espacio Ω, con la *σ- algebra* $\mathcal{A}$ de sucesos sobre la que se ha definido la función de probabilidad P, *espacio de probabilidades* o *espacio probabilístico* y lo designaremos $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Algunas consecuencias de los axiomas:

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ si los eventos son disjuntos, es decir $A_i \cap A_j = \varnothing$

(3) Dados A y B eventos cualesquiera $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

(5) Si $A \subseteq B$ => $P(A) \leq P(B)$

(6) Para todo A, $P(A) \leq 1$

(7) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ para todo suceso A.

Ejemplos:

1. En los últimos años, las compañías de tarjetas de crédito han hecho un esfuerzo para atraer nuevas cuentas de estudiantes universitarios. Se seleccionó una muestra de 200 estudiantes y se les preguntó respecto si poseen una tarjeta de crédito y/o una tarjeta de crédito de viajes y entretenimiento. La información obtenida se muestra a continuación:

	Tarjeta de crédito de viajes y entretenimiento		
Tarjeta de crédito bancaria	**Si (V)**	**No (V^c)**	**TOTAL**
Si (T)	60	60	120
No (T^c)	15	65	80
TOTAL	75	125	200

Si se selecciona **un estudiante** al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) tenga tarjeta bancaria? $P(T) = 120/200$
b) tenga ambas tarjetas? $P(T \cap V) = 60/200$
c) tenga la tarjeta de crédito bancaria ó la tarjeta de crédito de viajes y entretenimiento? $P(T \cup V) = P(T) + P(V) - P(T \cap V) = 120/200 + 75/200 - 60/200 = 135/200$.
d) sólo tenga la tarjeta de crédito de viajes y entretenimiento? $P(\text{sólo } V) = P(V) - P(T \cap V) = 75/200 - 60/200 = 15/200$.
e) ninguna de las dos? $P(T^c \cap V^c) = P((T \cup V)^c) = 1 - P(T \cup V) = 1 - 135/200 = 65 / 200$.

2. Supongamos que cuando una computadora se "cuelga" (no responde), el 75% de las veces se debe a problemas de memoria, el 15% de las veces a problemas de software y el 15% de las veces se debe a problemas que no son ni de memoria ni de software. Si una computadora se cuelga,
   a) ¿cuál es la probabilidad de que los dos primeros problemas (memoria y software) ocurran simultáneamente?
   M = "se cuelga por problemas de memoria"
   S = "se cuelga por problemas de software".

   $P(M) = 0.75$, $P(S) = 0.15$ y $P(M^c \cap S^c) = 0.15$

   Debemos hallar : $P(M \cap S)$, para ello hallamos $P(M \cup S)$ primero:

$P(M \cup S) = 1 - P((M \cup S)^c) = 1 - P(M^c \cap S^c) = 1 - 0.15 = 0.85.$
Luego $P(M \cap S) = P(M) + P(S) - P(M \cup S) = 0.75 + 0.15 - 0.85 = 0.05$

b) ¿cuál es la probabilidad de que se cuelgue únicamente por un problema de software?

P(sólo S) $= P(S) - P(M \cap S) = 0.15 - 0.05 = 0.10.$

Asignación de Probabilidades

Supóngase que el espacio muestral Ω asociado a cierto experimento es finito o infinito numerable. En este caso, una manera simple de trabajar es asignar probabilidades a los sucesos elementales, ya que cualquier suceso A será unión de sucesos elementales que son obviamente mutuamente excluyentes. Designando E_i a los sucesos elementales de Ω, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (si Ω es finito la unión es finita). Si se conocen $P(E_i) = p_i \ \forall i$, de manera que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, entonces dado cualquier suceso A, su probabilidad se puede obtener sumando las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen, es decir,

$$P(A) = \sum_{E_i \subset A} p_i$$

Ejemplos:

4. Se arroja un dado normal. En este caso $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y, por tratarse de un dado normal, los sucesos elementales $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}$, $E_3 = \{3\}$, $E_4 = \{4\}$, $E_5 = \{5\}$ y $E_6 = \{6\}$ tienen probabilidad $p_i = 1/6$, $i = 1, 2, ..., 6$. Si se define el suceso A = "el resultado es mayor que 3",

A puede expresarse como $A = E_4 \cup E_5 \cup E_6 = \{4, 5, 6\}$, por lo tanto,

$$P(A) = P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$$

5. Se arroja un dado no normal tal que la probabilidad de las caras pares es el doble de la probabilidad de las caras impares, es decir, si se llama p a la probabilidad de cada cara impar,

$$P(E_1) = P(E_3) = P(E_5) = p \qquad \text{y} \qquad P(E_2) = P(E_4) = P(E_6) = 2p.$$

Como la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales debe ser igual a 1,

$$\sum_{i=1}^{6} P(E_i) = 3p + 6p = 9p = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{1}{9}$$

Entonces para el evento A definido en (1), resulta

$$P(A) = P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 2p + p + 2p = 5\ \frac{1}{9} = 5/9.$$

Obsérvese que en el ejemplo 1. todos los sucesos elementales tienen igual probabilidad. Un espacio muestral finito Ω asociado a un experimento aleatorio E se dice **espacio equiprobable** si todos los sucesos elementales tienen igual posibilidad de ocurrir.

Probabilidad condicional

Juan y Pedro disponen de una caja con 9 bolitas, de las cuales 4 son de color verde y las restantes son azules. De las 4 bolitas verdes, la mitad son lisas y la otra mitad rayadas, y de las 5 bolitas azules, 4 son lisas y una sola es rayada. Juan extrae una bolita al azar y, sin que la haya mirado Pedro le dice que es verde, ¿cuál es la probabilidad de que la bolita sea rayada?
Si se definen los sucesos R = "la bolita es rayada" y V = "la bolita es verde". Obviamente, sin ninguna información previa, P(R) = 3/9 =1/3 y P(V) = 4/9.
Sin embargo, como ellos ya saben que la bolita es verde, la probabilidad de que sea rayada es 2/4, ya que, entre las verdes la mitad es lisa y la mitad rayada. Obsérvese, que al ocurrir V, el espacio muestral se *reduce*.

En general, dado un experimento E y su espacio muestral asociado Ω, se quiere determinar cómo afecta a la probabilidad de un evento A el hecho de saber que ha ocurrido otro evento B.

Definición:
Sean A y B eventos tales que P(B) > 0, la probabilidad del evento A condicional a la ocurrencia del evento B es

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Se define como la probabilidad de que ocurran simultáneamente ambos eventos, sobre la probabilidad del que ocurrió primero.

En el ejemplo anterior, P(V) = 4/9 y $P(R/V) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{2/9}{4/9} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo:
Con el fin de analizar la relación que existe entre el sexo y la preferencia de los estudiantes universitarios por tomar cursos en el área de Ciencias Exactas o Ciencias Sociales, una universidad privada encuestó a 300 de sus estudiantes. La información se resume en la siguiente tabla:

Especialidad preferida / Sexo	Ciencias Sociales (S)	Ciencias Exactas (E)	TOTAL
Femenino (F)	53	69	122
Masculino (M)	76	102	178
TOTAL	129	171	300

Si se selecciona un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) sea sexo masculino, si se sabe que toma cursos en el área de Ciencias Exactas?

P(M/E) = P(M∩E) / P(E) = 102/300 / 171/ 300 = 102 / 171

b) tome cursos en el área de Ciencias Sociales, si se sabe que no es de sexo masculino?

$P(S/M^c) = P(S \cap M^c) / P(M^c) =$ 53/300 / 1 - 178/ 300 = 53/122.

c) no tome cursos en el área de Ciencias Sociales, si se sabe que es de sexo masculino?
$P(S^c/M) = 102/178$.

Regla de la multiplicación:

Dados dos sucesos A y B, tales que P(B) > 0,

$$P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B).$$

Si además, P(A) > 0,

$$P(A \cap B) = P(B/A)\ P(A).$$

Ejemplo:
En el ejemplo referido a las bolitas, suponga ahora, que Juan extrae dos bolitas al azar *sin reposición*. ¿Cuál es la probabilidad de extraiga una bolita verde y una azul, en ese orden?

Sean los eventos V = "la primera bolita es verde" y A = "la segunda bolita es azul", se debe calcular la $P(V \cap A)$. Aplicando la regla de la multiplicación

$$P(V \cap A) = P(V)\,P(A/V) = \frac{4}{9}\,\frac{5}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

Eventos independientes:

Hay casos en los que $P(A/B) \neq P(A)$, mientras que en otros $P(A/B) = P(A)$, es decir, que la ocurrencia del suceso B a veces altera la probabilidad de ocurrencia de A y otras veces no la altera.

Definición:
Dos eventos A y B cualesquiera de un espacio muestral Ω se dicen **independientes** si la información acerca de la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro, es decir,

$$P(A/B) = P(A) \quad y \quad P(B/A) = P(B)$$

Si A y B no son eventos independientes, se dice que son eventos **dependientes**.

Regla de la multiplicación para eventos independientes:

Si los eventos A y B son **independientes**, la probabilidad de la intersección de A y B es igual al producto de las probabilidades de A y B, es decir,

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Ejemplo:
De un mazo de 40 cartas españolas, se extrae una carta al azar. Se definen los siguientes sucesos:
A = "la carta es copa o espada", B = "la carta no es copa" y C = "la carta es copa u oro"

$$P(A) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \qquad P(C) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \neq P(A), \text{ entonces A y B no son independientes.}$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A), \text{ entonces A y C son independientes.}$$

Propiedades:

(1) Si los sucesos A y B son mutuamente excluyentes ($A \cap B = \varnothing$), y $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, entonces A y B no son eventos independientes.

(2) Si A y B son eventos independientes entonces,

a. A y B^c también lo son,
b. A^c y B también lo son,
c. A^c y B^c también lo son.

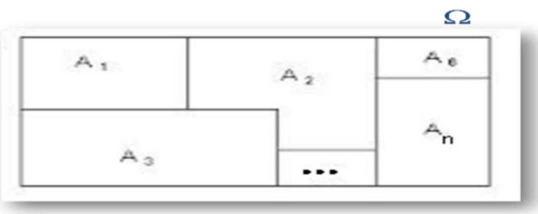
Definición:

Una colección de eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ constituye una **partición** del espacio muestral Ω si

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$,

(2) $P(A_i) > 0 \quad \forall i$,

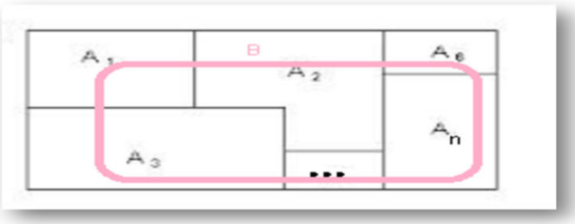
(3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.



Teorema de la Probabilidad Total:

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω y sea B un suceso cualquiera, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)$$



En efecto,

$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i).$$

Teorema de Bayes:

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω y sea B un suceso cualquiera tal que $P(B) > 0$, entonces

$$P(A_j/B)=\frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)\,P(A_i)}.$$

En efecto,

$$P(A_j/B)=\frac{P(B\cap A_j)}{P(B)}=\frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)P(A_i)}.$$

Ejemplo:
Una cadena de comercios de video vende tres marcas diferentes de videograbadoras (VCR). De sus ventas de VCR, 50% son de la marca A (la menos costosa), 30% son de la marca B y 20% de la marca C. Cada fabricante ofrece un año de garantía en partes y mano de obra. El 25% de las VCR de la marca A requieren trabajo de reparación en garantía, mientras que los porcentajes correspondientes a las marcas B y C son 20% y 10% respectivamente.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador seleccionado al azar haya comprado una VCR que necesite reparación mientras tiene garantía?
2. Si un cliente regresa a uno de tales comercios con una VCR que necesita reparación dentro de la garantía, ¿cuál es la probabilidad de que sea una VCR de la marca B?

Del enunciado se extrae la siguiente información:

$P(A)=0.50 \quad P(B)=0.30 \quad P(C)=0.20$

$P(R/A)=0.25 \quad P(R/B)=0.20 \quad P(R/C)=0.10$

donde

A = “la VCR es marca A”, B = “la VCR es marca B”, C = “la VCR es marca C” y R = “la VCR requiere reparación en período de garantía”.

1. $$\begin{aligned}P(R)&=P(R/A)\,P(A)+P(R/B)\,P(B)+P(R/C)\,P(C)=\\&=0.25\;0.5+0.20\;0.30+0.10\;0.20=0.205\end{aligned}$$

2. $$P(B/R)=\frac{P(R/B)\,P(B)}{P(R/A)\,P(A)+P(R/B)\,P(B)+P(R/C)\,P(C)}=\frac{0.20\;0.30}{0.205}=0.293.$$

Fin Capítulo I