

CURVAS DE NIVEL

→ Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$.

* la gráfica de $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
se dibuja en $\mathbb{R}^{n+1}$

Conjunto de nivel c : cto de pto $(x, y) \in U: f(x, y) = c$

SUPERFICIES DE NIVEL

→ Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$.

La sup. de nivel c : cto de pto $(x, y, z) \in U: f(x, y, z) = c$

SECCIONES

→ Intersección de la gráfica de f con un plano vertical. (xz o yz)

LÍMITES Y CONTINUIDAD

$x_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$
 $x = (x, y, z)$

• Disco abierto de radio r ($r \in \mathbb{R}$): $D_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3: \|x - x_0\| < r\}$

• Entorno de $x \in \mathbb{R}^n$: cto abierto U tal que $x \in U$

• ∂A : Frontera de A : para cada cto ab. U , $\forall x \in U$, existen pto $x_1 \in A$ y $x_2 \notin A$.

↳ Punto que está en el borde

• f continua en x_0 si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

• la no existencia de límites: Calculamos el límite de f cuando x es cte y luego cuando y es cte; si los resultados son diferentes, el límite no existe.

DIFERENCIACIÓN

• $C^n \leftarrow n$ -ésima derivada es continua.

→ DERIVADAS PARCIALES

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

} Para calc. por definición

• Ecuación del plano tg para una función $f(x, y)$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$

↳ Se utiliza para calcular una aproximación lineal

DiF → CONT

CONT ↗ DiF

- DIFERENCIABILIDAD -

DER. PAR. → DiF

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f dif en $(x_0, y_0) \in U$ si:

NO DER. PAR. → NO DiF

✓ $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - f(x_0, y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

• Gradiente: vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f

$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

• Matriz derivada de f , evaluada en $x_0 \leftarrow Df(x_0)$

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la derivada es una matriz de $n \times m$

Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ent. $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$

DPC $\rightarrow$ Dif $\rightarrow \exists$ DP

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz de } 2 \times 3$$

$\downarrow \nabla \nearrow$
CONT

Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ obtenemos el VECTOR GRADIENTE.

$$\nabla f(x) = (f_x(x), f_y(x), f_z(x)) \quad \cdot x = (x,y,z)$$

$$\nabla f(x) = (f_x(x), f_y(x)) \quad \cdot x = (x,y)$$

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n, m = 1, 2, 3$), la MEJOR APROX. LINEAL a f en un punto:

$\rightarrow \text{Sup } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en (x_0, y_0)

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + f(x_0, y_0)$$

PASOS PARA ESTUDIAR DIF

$\rightarrow \text{Sup } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in \text{Dom}(f)$

1° ¿ f continua en (x_0, y_0) ? $\rightarrow$ si NO: f no es dif en (x_0, y_0)

$\downarrow$ si lo es

2° ¿ $\exists$ derivs. parcs. en (x_0, y_0) ?

$\downarrow$ si existen

3° ¿son continuas las dp en (x_0, y_0) ? $\rightarrow$ si lo son, f es dif. en (x_0, y_0)

$\downarrow$ si NO

4° Construyo $\pi(x,y) = z = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y + f(x_0, y_0)$

5° calculo $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - \pi(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = \begin{cases} \rightarrow 0 & \therefore f \text{ es dif en } (x_0, y_0) \\ \rightarrow \neq 0 & \therefore f \text{ no es dif en } (x_0, y_0) \end{cases}$

REGLAS DE DERIV (repaso)

• Potencia

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

• Producto

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

• Cociente

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

• Cadena

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

SOBRE DERIVADAS DIRECCIONALES:

$$\nabla f = \frac{f_r}{r} \quad \text{donde: } f_r = (f_x, f_y, f_z)$$

$$r = \|f_r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Para hallar la deriv. dir. de la función f , necesito:

$\rightarrow$ la función $f(x)$

$\rightarrow$ Dirección de un vector v

$\rightarrow$ un punto x_0

Ej. Der. direc. de $f(x,y,z) = z^2x + y^3$

en el pto $(1,1,2)$ en la direc. $\frac{1}{\sqrt{5}}i + \frac{2}{\sqrt{5}}j$

$$\begin{aligned} 2^\circ \nabla f(1,1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) &= (2^2, 3y^2, 2zx) \Big|_{(1,1,2)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \\ &= (4, 3, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

1° Si $\|v\| \neq 1$, hay que hacer que valga 1 div. por su módulo

vector velocidad $\leftarrow 1^{\text{ra}}$ derivadas de las comp. de la trayectoria. (vector)

Rapidez $\leftarrow$ longitud del vector velocidad (escalar)

vector aceleración $\leftarrow$ la 2^{da} derivada (vector)

SOBRE DERIVADAS PARCIALES ITERADAS (de orden sup.)

• Si las de 1^{er} orden son continuas, las mixtas se pueden calcular en cualq. orden.

POLINOMIO DE TAYLOR DE ORDEN 2:

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right)$$

EXTREMOS

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow f$ alcanza un máximo local en (x_0, y_0) si

$\exists r > 0$ y $D_r(x_0, y_0) \subseteq U$ tal que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \forall (x, y) \in D_r(x_0, y_0)$

$\rightarrow f$ alcanza un mínimo local en (x_1, y_1) si

$\exists \delta > 0$ y $D_\delta(x_1, y_1) \subseteq U$ tal que $f(x, y) \geq f(x_1, y_1) \forall (x, y) \in D_\delta(x_1, y_1)$

PC $\rightarrow (x_0, y_0)$ es PC si $Df(x_0, y_0) = 0 \begin{cases} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{cases} = 0$

CÁLCULO DEL HESSIANO (determinante)

$$|Hf(x_0, y_0)| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

PASOS PARA HALLAR MÁX. Y MÍN. LOCALES:

1° Hallamos los PC

$$f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$$

2° Con los PC, evaluamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

3° Calculamos el Hessiano

$\rightarrow$ Si $|Hf(x_0, y_0)| \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{mejor en } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ < 0 \rightarrow \text{Punto silla} \\ = 0 \rightarrow \text{no aseg. nada} \end{cases} \begin{cases} > 0 \text{ mín. local} \\ < 0 \text{ máx. local} \\ = 0 \text{ no aseg. nada} \end{cases}$

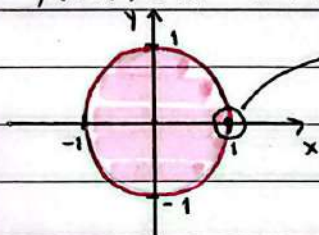
RESOLUCIÓN 1er PARCIAL

① Dada la sig. función $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ def. por:

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

i) Escribira $D = \text{Dom}(f)$ el dom de la función $f(x, y)$ en forma de c/jto y graficar. Determinar un pto en la frontera del dom. ∂D y marcar en el gráfico.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



El punto $(1, 0) \in \partial D$ (es pto frontera) (*)

Justif de (*): Tomo disco de radio ϵ alrededor de $(1, 0)$, dentro de D_ϵ habrán puntos del tipo

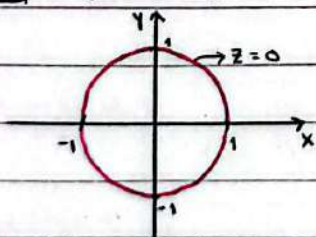
$$\rightarrow (1 + \epsilon, 0) \notin \text{Dom}(f) \text{ porque } (1 + \epsilon)^2 > 1$$

$$\rightarrow (1 - \epsilon, 0) \in \text{Dom}(f) \text{ porque } (1 - \epsilon)^2 < 1$$

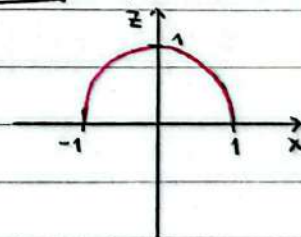
$$z^2 + x^2 - y^2 = 1$$

ii) Hallar y graficar en el plano xy la curva de nivel donde $z = 0$
 " " en el plano xz la sección donde $y = 0$

$$z = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$



$$y = 0 \Rightarrow f(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$$



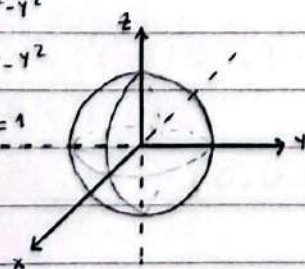
a) Graficar la superficie. La gráfica de la función forma parte de la gráfica de una sup. cuádrica conocida, identif. Graficar $z = f(x, y)$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

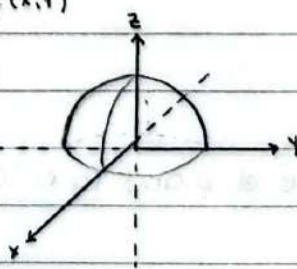
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ESFERA
RADIO 1



$$z = f(x, y)$$



consultar:

iii) Justif. dif. en todos los pto de $D-\partial D$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \therefore D-\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

• Para que $f(x,y)$ sea dif en $(x_0, y_0) \in D-\partial D$ se debe cumplir:

→ f continua en (x_0, y_0)

→ las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) existen y son continuas

luego:

• f continua en D , en particular en $D-\partial D$

• Veamos que pasa con las derivadas parciales de f :

$$f_x = \frac{d}{dx} (\sqrt{1-x^2-y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Para que f_x, f_y sean continuas, $\sqrt{1-x^2-y^2}$ debe ser distinto de cero, por $D-\partial D$ sabemos que $1-x^2-y^2 > 0 \therefore \sqrt{1-x^2-y^2}$ es distinto de cero y f_x, f_y son continuas.

$\therefore f(x,y)$ es dif en todos los pto de $D-\partial D$

Escriba la ecuación del plano tg. a la gráfica de $z = f(x,y)$ en $(0,0)$ y una ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano tg. que pase por $(0,0, f(0,0))$

Ecuac. plano tg.

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

(?)

$$\Rightarrow (0,0)(x-0, y-0) + f(0,0) = z \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$P_0 = (0,0,1) \Rightarrow \vec{\nabla} g(P) = (0,0,2) = \vec{n}$$

$$g_x = 2x$$

$$g_x(P_0) = 0$$

$$g_y = 2y$$

$$g_y(P_0) = 0$$

$$g_z = 2z$$

$$g_z(P_0) = 2$$

$$\pi_T: \vec{\nabla} g \cdot (P - P_0) = 0 \Rightarrow (0,0,2) \cdot (x-0, y-0, z-1) \Rightarrow \pi_T: 2(z-1) = 0$$

$$2z - 2 = 0$$

iv) Encuentre el plano tg a la gráfica de f en $(1,0,0)$

2) Sea $z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

i) Determinar si f es continua en $(0, 0)$. Justif.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta) = 0 = f(0, 0)$$

ALOTADO

ii) Calcular $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$. Por definición

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta y^3}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1$$

Analizar si $f(x, y)$ es dif. en $(0, 0)$. Justif.

1° ¿ f continua en $(0, 0)$? por i), sí

2° ¿Existen las derivadas parciales en $(0, 0)$? Sí

3° ¿Son continuas las der. par. en $(0, 0)$?

$$f_x = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

continuas en $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$
por ser div. de pol. $\rightarrow f$ dif en $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$

Particularmente en $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \\ & = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{\Delta x^3 - \Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - 0 - \Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{r^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{r^2} - r \cos \theta + r \sin \theta}{r} = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta - \cos \theta + \sin \theta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^3 \theta - \sin^3 \theta - \cos \theta + \sin \theta \end{aligned}$$

luego el límite $\therefore f$ no es dif. en $(0, 0) \rightarrow$ las der. parciales de f no son continuas en $(0, 0)$

PC $\rightarrow$ DiF

DiF $\rightarrow$ PC

iii) Dadas $g(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ con $x(u,v) = e^v + u^2$; $y(u,v) = u+v$;
 $z = f(x,y) = 3x+y$. Hallar $f(g(u,v)) = h(u,v)$ y encontrar $Dh(0,0)$ usando la
 regla de la cadena.

→ ¿ $f(g(u,v)) = h(u,v)$? : Como $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, puedo hallar $f \circ g$

$$g(u,v) = (e^v + u^2, u+v)$$

luego

$$f \circ g = f(g(u,v)) = h(u,v) = 3e^v + 3u^2 + u+v$$

Ahora, hallo $Dh(0,0)$:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(0,0) = (1,0) \xrightarrow{\text{reemplazo en}} Df(g(0,0)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Dg = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & e^v \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$Dh(0,0) = Df(g(0,0)) \cdot Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \cdot 0 + 1 \cdot 1) & (3 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

iv) Hallar la mejor aprox. lineal a g en el pto $(0,0)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u-0 \\ v-0 \end{bmatrix} + g(0,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + (1,0) = \begin{bmatrix} 0u+1v \\ 1u+1v \end{bmatrix} + (1,0)$$

$$= \begin{bmatrix} v \\ u+v \end{bmatrix} + (1,0) = \begin{bmatrix} v \\ u+v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v+1 \\ u+v \end{bmatrix}$$

③ Sea $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy + 6$

i) Halle la derivada direccional de la función f en la dirección del vector $\vec{v} = \langle 1, 1 \rangle$ en el pto $(1, 2)$.

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, como $\vec{v}$ no es unitario, definimos $\vec{u}$ (div $\vec{v}$ por su módulo)

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

luego, la deriv. direcc es:

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= (3x^2 - 3y, -3y^2 - 3x)|_{(1,2)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (-3, -15) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \underline{D_{\vec{u}} f(1,2)} &= -3/\sqrt{2} - 15/\sqrt{2} = \boxed{-9\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ii) Halle y clasifique los pto críticos de f

1° $f_x(x,y) = 0 = f_y(x,y)$

$f_x = 3x^2 - 3y \Rightarrow 3x^2 - 3y = 0 \rightarrow x^2 = y$ Si $x=0 \rightarrow y=0$ $PC_1 = (0,0)$

$f_y = -3y^2 - 3x \Rightarrow -3y^2 - 3x = 0$ $x=-1 \rightarrow y=1$ $PC_2 = (-1,1)$

$\rightarrow -3x^4 - 3x = 0 \Rightarrow -3x(x^3 + 1) = 0$

2° Con los PC, evalúe:

$f_{xx} = 6x$

$f_{yy} = -6y$

$f_{xy} = -3$

$\rightarrow -3x = 0$

$\boxed{x=0}$

$\rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\boxed{x=-1}$

3° Calcule el Hessiano $\rightarrow H = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$
 $= 6x(-6y) - (-3)^2$
 $= -36xy - 9$

4° Clasifique los PC

$PC_1 = (0,0) \Rightarrow H(0,0) = -9 < 0 \therefore PC_1$ Punto silla

$PC_2 = (-1,1) \Rightarrow H(-1,1) = 27 > 0$
 $\rightarrow f_{xx}(-1,1) = -6 < 0$ $\therefore PC_2$ máximo local

iii) Def. máximo local:

• Existe $r > 0$ tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x,y), \forall (x,y) \in D_r(-1,1)$

iv) Escriba $P_2(x,y)$ el polinomio de Taylor de orden 2 que aproxima a $z=f(x,y)$ alrededor de (x_0, y_0)
 $(-1, 1)$

$$P_2(x,y) = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x-(-1)) + f_y(-1,1)(y-1) + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(-1,1)(x-(-1))^2 + f_{yy}(-1,1)(y-1)^2 + 2 f_{xy}(-1,1)(x-(-1))(y-1) \right) =$$

$$= 7 + \frac{1}{2} \left(-6(x+1)^2 - 6(y-1)^2 + 2(-3)(x+1)(y-1) \right) =$$

$$= 7 + \frac{1}{2} \left(-6x^2 - 12x - 6 - 6y^2 + 12y - 6 - 6(xy - x + y - 1) \right) =$$

$$= 7 + \frac{1}{2} \left(-6x^2 - 6x - 6 - 6y^2 + 6y - 6xy \right) =$$

$$= 7 + 3x^2 - 3x - 3 - 3y^2 + 3y - 3xy$$

$$\boxed{= -3x^2 - 3y^2 - 3x + 3y - 3xy + 4}$$

• Sea $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, con a, b, c no simultáneamente nulos

→ Verif. que $(0,0)$ es un único pto crítico si $ab - bc \neq 0$

$P=(0,0)$ es PC si verif $g_x(0,0) = 0 = g_y(0,0)$

$$g_x = 2ax + by \Rightarrow g_x(0,0) = 0 \quad \therefore \text{Per PC}$$

$$g_y = bx + 2cy \Rightarrow g_y(0,0) = 0$$

¿P único PC?

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ bx + 2cy = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{-4acy}{b} + by = 0 \rightarrow y \cdot \left(\frac{b^2 - 4ac}{b} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \rightarrow y = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

$$b^2 = 4ac$$

$$b = 2\sqrt{ac}$$

INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

• Principio de Cavalieri (Integrales Iteradas)

$$\text{Vol} = \iint_R f \, dA = \int_c^d A(y) \, dy = \int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y) \, dx}_{\substack{1^\circ \text{ calc. con} \\ \text{respecto a } x}} dy$$

2° cálculo con respecto a y

• Teorema de Fubini

Sea f una fc en un dom. (rectangular) $R = [a,b] \times [c,d]$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dx \, dy$$

• JACOBIANO ← coef. que nos dice cuánto se expande (& contrae) la transf. del área.

Para integrales dobles:

$$DT(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Para integrales triples:

$$|DT(u,v,w)| = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

(valor absoluto)

SOBRE SISTEMAS DE COORDENADAS

• Coordenadas Polares

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta \in [0, 2\pi) \quad J = r$$

• Coordenadas Cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{donde } r = \sqrt{x^2 + y^2} ; \theta \in [0, 2\pi) \quad J = r$$

• Coordenadas Esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \text{donde } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \theta \in [0, 2\pi) ; \varphi \in [0, \pi] \quad J = \rho^2 \sin \varphi$$

TRAYECTORIAS Y VELOCIDAD

• Vector velocidad : $v(t) = c'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

→ Rapidez : $\|v(t)\| = \|c'(t)\|$

→ Aceleración : $v'(t) = c''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$

• Ecuación de la recta tg a la curva en $c(t_0)$: $\ell(t) = t c'(t_0) + c(t_0)$

LONGITUD DE ARCO : $\ell(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b \|c'(t)\| dt$

CAMPOS VECTORIALES en $\mathbb{R}^m$ ^{$m=2,3$}

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sup n=3$

$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ con $F_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

INTEGRALES DE LÍNEA

→ DE FUNCIONES ESCALARES (de trayectoria)

$$\int_c f ds = \int_a^b f(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt$$

PASOS :

1° Definir la curva c

2° Calcular $c'(t)$

3° Calcular $\|c'(t)\|$

4° Escribimos la integral y evaluamos

→ DE CAMPOS VECTORIALES

$$\int_c F ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t) \cdot dt$$

obs que $\int_c F ds$ depende no solo del campo F sino también de la tray. c

→ DE CAMPOS GRADIENTES

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ y $F = \nabla f = (f_x, f_y, f_z) < \begin{matrix} F \text{ es campo gradiente} \\ f \text{ función potencial} \end{matrix}$

$$\int_c F ds = \int_c \nabla f ds = f(c(b)) - f(c(a))$$

SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Algún dom. en $\mathbb{R}^2$

→ Una sup. param. es una función $\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

la sup. S correspondiente a Φ es su imagen: $S = \Phi(D)$

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ; \quad (u,v) \in D$$

Supongo Φ dif en $(u_0, v_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

• fijando v en v_0 obtengo una función $\Phi(u, t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya img es una curva sobre la sup.

$$\Phi_v(u_0, t) = (x(u_0, t), y(u_0, t), z(u_0, t))$$

$$\Phi_u(t, v) = (x(t, v), y(t, v), z(t, v))$$

De manera análoga para $v = v_0$.

• El vector T_u a la curva correspondiente es:

$$T_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

• luego, puedo calcular el normal

$$n = T_u \times T_v(u_0, v_0) \quad \text{en } (u_0, v_0)$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Sea S una sup. param: $S = \Phi(D)$ y $\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$A(S) = \int_S dS = \iint_D \|T_u \times T_v\| dA$$

INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea S una sup. param: $S = \Phi(D)$ y $\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

tal que $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ; \quad (u,v) \in D$

Sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una fc. def. sobre S .

la integral de f sobre S es:

$$\begin{aligned} \int_S f(x,y,z) dS &= \int_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|T_u \times T_v\| dA \\ &= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|T_u \times T_v\| du dv \end{aligned}$$

→ DE CAMPOS VECTORIALES

Sea $F(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ def sobre S

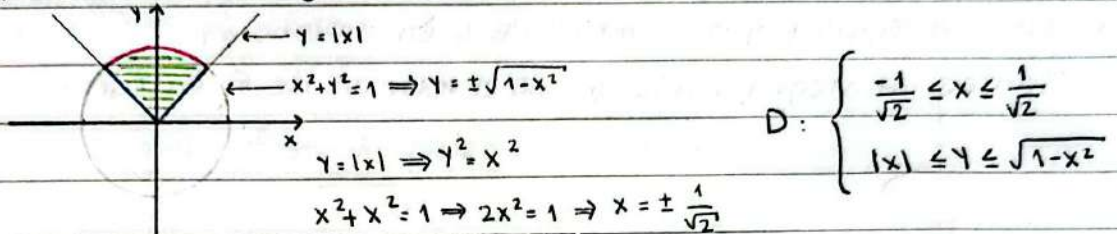
la int. de sup. (FLUJO) del campo F sobre Φ es:

$$\int_{\Phi} F dS = \iint_D F dS = \iint_D F(T_u \times T_v) du dv$$

RESOLUCIÓN 2° PARCIAL

① a) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ determinada por las restricciones
 $y \geq |x|$; $x^2 + y^2 \leq 1$

i) Describa la reg. D como unión de regiones elementales.



ii) Plantee las integrales iteradas que dan el área de D en cartesianas:

$$A = \iint_D dA = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$$

iii) Calcule el área de la región D mediante un cambio de variables.

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \text{coord. Polares, jacobiano} = r$$

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

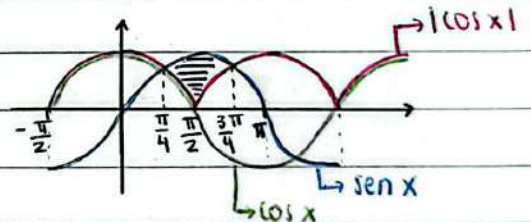
$$x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow r^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq r \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$$

$$y \geq |x| \Rightarrow r \sin \theta \geq |r \cos \theta|$$

$$r \sin \theta \geq r |\cos \theta|$$

$$\sin \theta \geq |\cos \theta|$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$



wego:

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

iv) Calcule $\iint_D f(x,y) dA$ con $f(x,y) = x^2 + y^2$. ¿Qué representa esta integral?

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$$

(b) Sea E la región en el primer octante encerrada por las superficies :

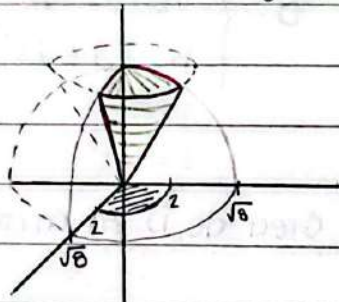
$$z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} \quad (\text{parte de esfera})$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{parte del cono})$$

y los planos coordenados ($x=0$; $y=0$)

i) Dibuje la región E y la "sombra" de E en el plano xy.

Plantee la integral triple que da el volumen de E en cartesianas.



1° Busco la intersección de la esfera y el cono

$$\sqrt{8 - x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$$

$$8 = 2x^2 + 2y^2$$

$$4 = x^2 + y^2 \rightarrow C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

2° Planteo en cartesianas:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} dz dy dx$$

ii) Calcule el volumen de E usando cambio de coordenadas.

→ COORDENADAS ESFÉRICAS

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi \quad ; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$z = \rho \cos \varphi \quad \rho \geq 0$$

$$\bullet \quad z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$$

$$\bullet \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bullet \quad x \geq 0 \Rightarrow \rho \cos \theta \sin \varphi \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$$

$$\cos \theta \geq 0$$

$$\rho^2 \leq 8$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi \leq 0$$

$$\bullet \quad y \geq 0 \Rightarrow \rho \sin \theta \sin \varphi \geq 0$$

$$\rho \leq \sqrt{8}$$

$$(\rho^2 \sin^2 \varphi)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \rho^2 \cos^2 \varphi \leq 0$$

$$\sin \theta \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq \rho \leq \sqrt{8}$$

$$\rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 \varphi \leq \cos^2 \varphi$$

$$|\sin \varphi| \leq |\cos \varphi|$$

$$\therefore 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

luego:

$$V(E) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\sqrt{8}} d\varphi =$$

$$\frac{\pi}{6} (\sqrt{8})^3 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6} (\sqrt{8})^3 (-\cos \frac{\pi}{4} + 1) \approx \boxed{3.47}$$

② Dada C descrita por $c(t) = (2\cos(t), \sin(t), t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Plantee la integral $\int_C f(x, y, z) ds$, para $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar continua cualquiera def. en un abierto que contiene a C .

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \int_0^{2\pi} f(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt & \bullet c'(t) &= (-2\sin t, \cos t, 1) \\ &= \int_0^{2\pi} f(2\cos t, \sin t, t) \cdot \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt & \bullet \|c'(t)\| &= \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \end{aligned}$$

(b) Sea C la curva en el espacio que se obtiene al hacer la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el paraboloides $z = 5 - x^2 - y^2$

i) De una parametrización de la misma

$$C = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 5 - (x^2 + y^2) \Rightarrow \boxed{z = 4} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Busco la intersección} \\ \text{de las superficies.} \end{array}$$

2º Luego, la parametrización:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ii) Dada $w = f(x, y, z) = x^2 + y$, calcule $F(x, y, z) = \nabla f$.

$$F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 0)$$

Evalúe $\int_C F(x, y, z) \cdot ds$

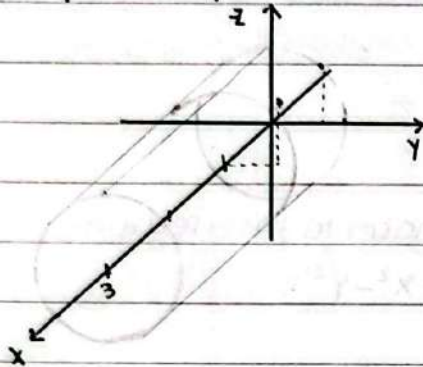
$$\begin{aligned} \int_C F(x, y, z) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \nabla f \cdot c'(t) dt = f(c(2\pi)) - f(c(0)) = \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 1, 0) \cdot (-2\sin t, \cos t, 1) dt = (2\cos 2\pi, 1, 0) - (2\cos 0, 1, 0) \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 1, 0) \cdot (-2\sin t, \cos t, 1) dt = 2\cos 2\pi \cdot 1 \cdot 0 - 2\cos 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= \int_0^{2\pi} 4\cos t dt = 4\sin t \Big|_0^{2\pi} = 4\sin 2\pi - 4\sin 0 = 0 - 0 = \boxed{0} \\ &= 4 - 4 = \boxed{0} \end{aligned}$$

③

(a) Sea S_1 la superficie dada por la parametrización

$$\Phi(x, \theta) = \langle x, \cos \theta, \sin \theta \rangle \text{ con } 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0 \leq x \leq 3$$

i) Dibuje S_1 . Determine y dibuje el vector normal a la sup. en el punto que está dado por el punto final del vector $\Phi(1, \pi/4)$



$$1^\circ \vec{\Phi}(1, \frac{\pi}{4}) = \langle 1, \cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \rangle = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2^\circ \vec{T}_\theta \times \vec{T}_x = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_S^* = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

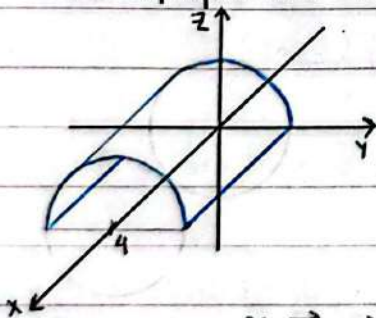
$$3^\circ \vec{n}_S^* \left(1, \frac{\pi}{4}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ii) Si $f(x, y, z) = x$. resuelva $\iint_S f(x, y, z) dS$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 x \cdot \underbrace{\|\vec{n}_S^*\|}_{=1} dx d\theta = 2\pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^3 = 2\pi \frac{9}{2} = \boxed{9\pi}$$

(b) Dada S la sup. del cilindro parabólico $1 - y^2 = z$ acotada por los planos $x=0$; $x=4$ y $z=0$

i) Grafique. De una param. de S , $\Phi(u, v)$ con $(u, v) \in D$. Calcule $\eta(u, v) = T_u \times T_v$



PARAMETRIZACIÓN

$$\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 4 \\ y = v & -1 \leq v \leq 1 \\ z = 1 - v^2 \end{cases} \quad \eta(u, v) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (0, 2v, 1)$$

ii) calcule $\iint_S \vec{F} d\vec{S}$ con la orientación de S elegida en i)

$$\int_0^4 \int_{-1}^1 (u, v, 1-v^2) (0, 2v, 1) dv du = \int_0^4 \int_{-1}^1 (v^2 + 1) dv du = \boxed{\frac{32}{3}}$$

iii) Plantee la integral cuyo cálculo da el área de superficie de S

$$A(S) = \iint_S \|\vec{n}_S^*\| dA = \int_0^4 \int_{-1}^1 \sqrt{4v^2 + 1} dv du$$