Análisis Matemático III

Examen Final

Apellido y nombres: . . . . L.U.Nº: . . . .

1. Sea
$$f(z) = f(x+iy) = y^2 \operatorname{sen} x + iy.$$
Hallar, si existen, los subconjuntos del plano complejo donde f es continua, derivable, holomorfa. En los puntos donde sea posible, calcular $f'(z)$

2. Hallar el valor de la integral
$$\int_{\partial B_{\frac{\pi}{2}}(0)} \frac{\cos z^2}{1+\cosh z}\, dz.$$

3. Encontrar el radio de convergencia de la serie de potencias
$$\sum_{n=0}^{\infty} [2+\cos(n\pi)+i]^n (z+i)^n.$$

4. Sea
$$f(z) = \frac{1}{z\,(z^2+9)}.$$
Hallar el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z_0 = 3i$ que converge en $z = -2i$. Precisar el anillo de convergencia de esta serie. Calcular el residuo de f en $z = 3i$.

5. Determinar y clasificar todas las singularidades de la función
$$f(z) = \frac{z-\pi}{z \operatorname{sen} z}.$$
Si la singularidad es evitable, definir la función de manera tal que en ese punto resulte holomorfa.

6. Hallar la transformación bilineal más general que transforma la región $G = \mathbb{C} - \overline{B_1(0)}$ en el semiplano $S = \{w \in \mathbb{C} : \Re w < 0\}$.

7. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \; -\pi < x \leq 0, \\ 0, & \text{si } \; 0 < x < \pi. \end{cases}$$

   a) Hallar la serie de Fourier de f.

   b) Graficar la función a la cual converge el desarrollo obtenido en el inciso a).

   c) Usando el desarrollo obtenido en a), calcular la suma de la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

29-02-2016