Unidad II

Parte II

Definición de Variable Aleatoria. Variable Aleatoria Discreta. Distribución de probabilidad. Función de distribución acumulada. Valor Esperado, Varianza y Desvío estándar de una Variable Aleatoria Discreta. Distribución Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, Hipergeométrica y Poisson.

Valor Esperado de una v.a. discreta

Ejemplo 1

Los clientes de una empresa proveedora de servicios de Televisión Satelital de cierta zona, pueden optar por contratar de 1 a 5 paquetes de señales (el abono básico consiste en un solo paquete y cada uno de los otros incluye un grupo de señales temáticas o premium). La distribución de probabilidad del *número de paquetes* X *contratados por un cliente* es:

X	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

El gerente de la empresa está interesado en el número promedio de paquetes contratados por un cliente, ie, el valor promedio de X en la población.

Cuando desean conocer el **promedio o media** entre las calificaciones obtenidas en los **finales** rendidos hasta el momento, **¿cómo lo calculan?**

Supongamos que hasta el momento rindieron **7 finales** y obtuvieron las siguientes notas:

8 9 8 9 9 10 9

El **promedio** se determina:

$$Media\,estimada = \frac{8+8+9+9+9+9+10}{7} = \frac{8*2\ +9*4\ +10*1}{7}$$

2/7≅ P(X=8)

4/7≅ P(X=9)

1/7≅ P(X=10)

$$= 8*\frac{2}{7} \quad + \quad 9*\frac{4}{7} \quad + \quad 10*\frac{1}{7} = \mathbf{8.86}$$

X = «calificación de un alumno en un final de su carrera» *(en puntos).*

Si la carrera se concluyera con la aprobación de **7 finales, el verdadero promedio o media o esperanza de X o, tambien llamado valor esperado de X, se calcularía:**

X = «calificación de un alumno en un final de su carrera» *(en puntos).*

$$E(X) = 8 * \frac{2}{7} \quad + \quad 9 * \frac{4}{7} \quad + \quad 10 * \frac{1}{7} = \mathbf{8.86}$$

$$\mathbf{E(X)} = 8 * \mathrm{P}(X = 8) + 9 * \mathrm{P}(X = 9) + 10 * \mathrm{P}(X = 10) = \mathbf{8.86}$$

La calificación promedio de un alumno en un final de su carrera es de 8.9 pts.

Valor Esperado de una v.a. discreta

$$\mathbf{E(X)} = 1 * P(X=1) + 2 * P(X=2) + 3 * P(X=3) + 4 * P(X=4) + 5 * P(X=5) = \mathbf{2.2}$$

Interpretación: El cliente, en promedio, contrata aprox. **2** paquetes.

Para calcular el valor promedio de X en la población

Conocer los valores posibles de **X** y sus respectivas probabilidades

El valor promedio, valor esperado o media de X es un promedio ponderado de los posibles valores 1, 2, ..., 5, donde los **pesos** son las **probabilidades** de esos valores.

Def.

Sea X una variable aleatoria discreta con rango R_X y función de probabilidad puntual $p_X(x)$, la esperanza o el valor esperado de X se define:

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \sum_{x \in R_X} x\, p_X(x) = \sum_{x \in R_X} x\ P(X = x)}$$

Interpretación de la esperanza: Si sobre cada valor posible de **X**, x, se coloca una masa $\mathbf{p_X(x)}$, el punto de equilibrio del sistema es **E(X).** En este sentido, se puede decir que **E(X)** es una medida del "centro" de la distribución. Es el centro de masa del sistema.

Ejemplo 2

Un usuario de una computadora intenta recordar su contraseña. Él sabe que puede ser una de los 4 posibles contraseñas que tiene anotadas. Prueba sus contraseñas hasta que encuentra la correcta.

Determinar el número promedio de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta.

Se define la v.a.

X = "*N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta*"

Queremos hallar el **número promedio** de X → **E(X)**

Sea **X** = «N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta" una v.a.»

N = 4 contraseñas

1 C

3 I

n =??

Ω = {C, (C^c,C), (C^C,C^C,C) ,(C^C,C^C,C^C,C)}
Finito.

luego: R_X = {0,1,2,3}

P(X = 0) = 1/4, **P(X = 2)** = 1/4,

P(X = 1) = = 1/4, **P(X = 3)** = 1/4.

La función de distribución de probabilidad es

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.25	0.25	0.25	0.25

Esta Distribución se denomina uniforme discreta

X = *«N° de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta»*

Función de distribución de probabilidad de la v.a. X

X	0	1	2	3
P(X = x)	0.25	0.25	0.25	0.25

El **número promedio** de contraseñas incorrectas probadas hasta encontrar la correcta es:

$$\mathbf{E(X)} = 0 * P(X=0) + 1 * P(X=1) + 2 * P(X=2) + 3 * P(X=3) =$$

Luego, **en promedio**, se deben probar con **aprox. 2** de contraseñas incorrectas para encontrar la correcta.

Ejemplo 1

Teniendo en cuenta la v.a.:

X = "*número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar***", con función de distribución de probabilidad:**

X	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

Si el costo del servicio (en pesos), Y, es función del número de paquetes contratados, según la siguiente fórmula:

$$Y = 400(X+1)$$

¿Cuál es el valor esperado del costo pagado por cliente, es decir, E(Y)?

Solución

X = "*número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar***", con función de distribución de probabilidad:**

X	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

Y = "*costo del servicio (en pesos) por cliente***",** $Y = 400\ (X+1)$

$R_Y = \{ \qquad \}$ **recorrido de la v.a. Y.**

Y					
P(Y = y)					

El valor esperado del costo pagado por cliente, es

$$E(Y) = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \qquad = \$$$

El costo promedio pagado por cliente es de $

Proposición

Si la v.a. **X** tiene función de probabilidad puntual P(X = x) para todo x $\in$ $\mathbf{R_X}$, entonces la esperanza de cualquier función real h(X), está dada por,

$$\boxed{E(h(X)) = \mu_{h(X)} = \sum_{x \in R_X} h(x)\, P(X = x)}$$

Propiedades de la esperanza

1. Sea X v.a. tal que X = k $\Rightarrow$ E(X) = k

2. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = X + k $\Rightarrow$ E(Y) = E(X) + k

3. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = kX $\Rightarrow$ E(Y) = k E(X)

Ejemplo

Tomamos nuevamente la v.a. definida:

Y =” *costo del servicio (en pesos) contratado por un cliente elegido al azar*”.

Dicha variable aleatoria es función del número de paquetes contratados por cliente,

$$\mathbf{Y = 400\,(X + 1)}$$

¿Cuál es el valor esperado del costo pagado por cliente, es decir, E(Y)?

E(Y) =

El costo promedio del servicio pagado por cliente es de

Varianza de una v.a. discreta

La esperanza de una v.a. X determina el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, pero no proporciona información acerca de la forma de la distribución.

Las siguientes tablas y gráficos presentan tres distribuciones discretas de probabilidad que poseen el mismo valor esperado, sin embargo, difieren notablemente en la dispersión de sus valores:

X	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.4	0.3

Y	0	1	2	3	4
P(Y = y)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

Z	2
P(Z = z)	1

Varianza de una v.a. discreta

La esperanza de cada una de las v.a. es en efecto, 2 :

X	1	2	3
P(X = x)	0.3	0.4	0.3

$$\mathbf{E(X)} = 1*0.3 + 2*0.4 + 3*0.3 = \mathbf{2}$$

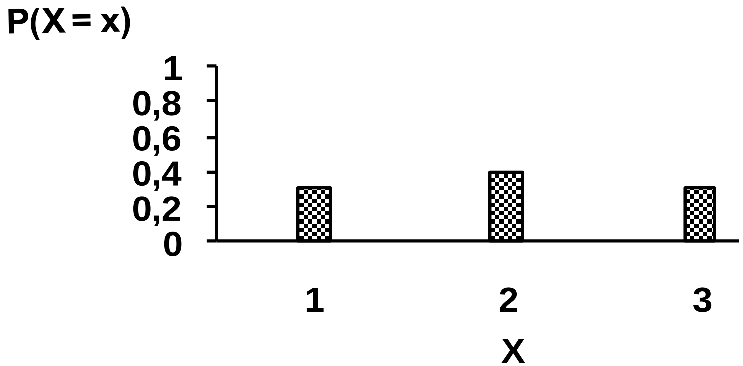
Y	0	1	2	3	4
P(Y = y)	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

$$\mathbf{E(Y)} = 0*0.2 + 1*0.1 + 2*0.3 + 3*0.3 + 4*0.1 = \mathbf{2}$$

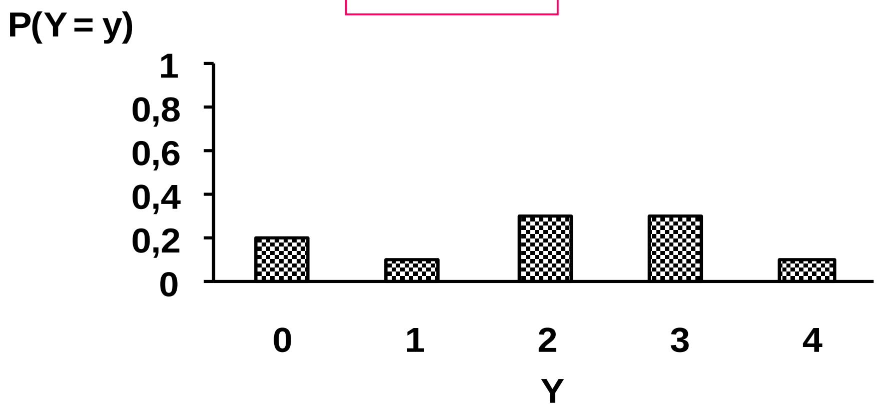
Z	2
P(Z = z)	1

$$\mathbf{E(Z)} = 2*1 = \mathbf{2}$$

E(X) = 2

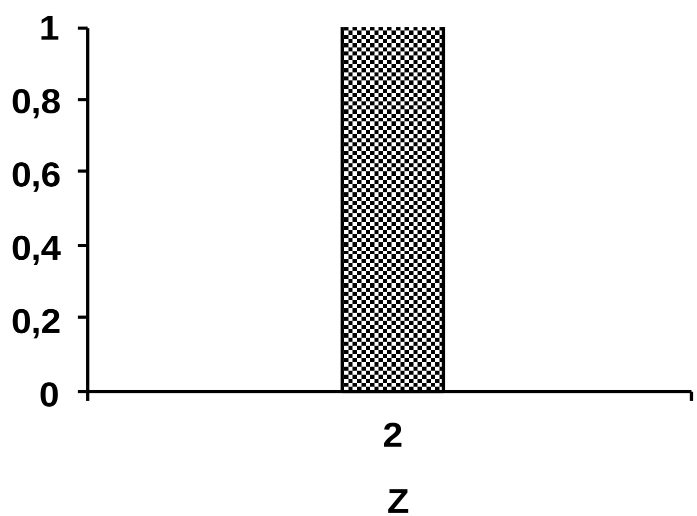


E(Y) = 2



P(Z = z)

E(Z) = 2



Def.

Sea X una v.a. con función de probabilidad puntual $P(X = x)$ y esperanza μ_X, la **varianza** de X, que se denotará **V(X)**, σ_X^2 ó σ^2, es

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[\,(X - \mu_X)^2\,\right] = E\left[\,(X - E(X))^2\,\right] = \sum_{x \in R_X} (x - \mu_X)^2 \; P(X = x)$$

La **varianza** de X, representa la dispersión promedio de las distancias al cuadrado de los valores de la v.a respecto a su valor esperado.

Se prueba desarrollando el cuadrado y aplicando **propiedades** de la **esperanza**, que

$$V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \; P(X = x) - \left[\sum_{x \in R_X} x\, P\,(X = x)\right]^2.$$

Varianza de una v.a.

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{x \in R_X} x^2\, P(X = x) - \left[\sum_{x \in R_X} x\, P(X = x)\right]^2.$$

La **varianza** de X, representa la dispersión promedio de las distancias al cuadrado de los valores de la v.a respecto a su valor esperado.

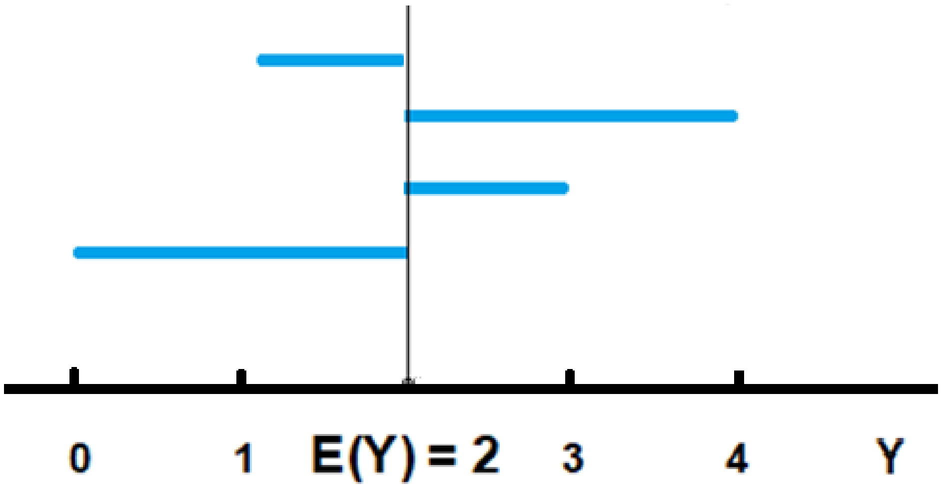
Def.

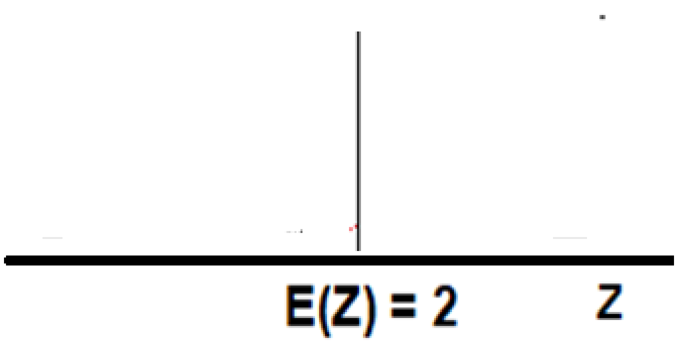
Sea X una v.a. El **desvío estándar** de X, que se denotará, σ_X ó σ, es

$$\boxed{\sigma_X = +\sqrt{V(X)}}$$

Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Varianza de una v.a.: Gráficamente





Silvina Pistonesi

Varianza de una v.a. X

$$V(X) = \sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \left[E(X)\right]^2$$

Desvío estándar de una v.a. X

$$\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$$

Observaciones!!!!

- La **varianza** tiene importancia teórica, pero resulta difícil su interpretación porque las unidades de medición de la variable de interés están elevadas al cuadrado. En cambio, las unidades de medición del **desvío estándar** son las unidades de la variable. Por ello, que esta es la medida de dispersión más utilizada en la práctica.

- La **varianza** y el **desvío estándar** son valores no negativos.

Ejemplo

Hallar la varianza y el desvío estándar de las tres v.a. presentadas anteriormente con esperanza igual a 2. Para ello se utilizará la expresión

$$\mathbf{V(X) = \sigma_X^2 = E(X^2) - .[E(X)]^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 =$$

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 =$$

Hallar:

a) la variabilidad del **número de paquetes de programas contratados** por un cliente seleccionado al azar, ie, **V(X)**.

b) La variabilidad del **costo del servicio** (en pesos) **contratado por cliente**, ie, **V(Y).**

Ejemplo

Sea la v.a. X = "número de paquetes de programas contratados por un cliente seleccionado al azar**", con distribución de probabilidad:**

X	1	2	3	4	5
P(X = x)	0.375	0.275	0.175	0.10	0.075

y la varianza es

$$V(X) = (1^2\ 0.375 + 2^2\ 0.275 + 3^2\ 0.175 + 4^2\ 0.100 + 5^2\ 0.075) - (2.225)^2 =$$

El desvío estándar es $\sigma_X =$

Las fluctuaciones promedio del número de paquetes de programas contratados por un cliente respecto al número medio paquetes contratados por cliente es de

Propiedades de la varianza

1. Sea X v.a. tal que $P(X = c) = 1 \Rightarrow V(X) = 0$.

2. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = X + k$ $\Rightarrow V(Y) = V(X)$.

3. Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = kX \Rightarrow$ $V(Y) = k^2 V(X)$.

Ejemplo

Se definió anteriormente, la v.a. Y =« *el costo del servicio (en pesos) contratado por cliente***”,** $Y = 400(X+1)$

su varianza, V(Y), es

V(400 (X+1)) =

Ejercicios

1. El gerente de una gran tienda necesita determinar la distribución de probabilidad del número de clientes entre los próximos tres que ingresan a la tienda que hacen una compra. El 30% de los clientes realizan una compra.

Si se define la v.a.:

X = *"n° de clientes entre los próximos 3 que ingresen a la tienda*

a. ¿Cuál es la probabilidad de que de los tres que ingresen a la tienda todos realicen una compra si se sabe que más de 1 lo hizo?

b. ¿Cual es el número promedio de clientes que realizan una compra entre los próximos tres que ingresan a la tienda ?

c. Hallar el desvío estándar del número de clientes entre los próximos tres que ingresan a la tienda que hacen una compra.

2. Una moneda está “cargada” y de este modo, la probabilidad de obtener una cara es el triple de obtener una seca. Si se realizan tres lanzamientos independientes de la moneda, determinar:

a) La distribución de probabilidad de la v.a. X =“ *N° total de caras obtenidas en 3 lanzamientos de la moneda*”.

b) La probabilidad de obtener a los sumo 2 caras.

c) El número promedio de caras obtenidas en 3 lanzamientos de la moneda.

d) La varianza del número de caras obtenidas en 3 lanzamientos.

e) La función de distribución acumulada de la v.a. X.

3. Un inversionista dispone de cierta cantidad de dinero para invertir. Tiene 3 alternativas posibles. En la siguiente se presentan las utilidades estimadas (en pesos) de cada alternativa de acuerdo con las distintas condiciones económicas:

Situac.\ Alternativa	A	B	C
La economía declina	500	-2000	-7000
No hay cambios	1000	2000	-1000
La economía se expande	2000	5000	18000

En base a su experiencia, el inversionista asigna las siguientes probabilidades a cada situación económica: la probabilidad de que la economía decline es 0.3; de que no haya cambios es 0.5 y de que se expanda es 0.2. Determinar la mejor elección para el inversionista, atendiendo a las ganancias esperadas.