EXAMEN FINAL DE ELEM. DE ÁLG. Y DE GEOM. (12/8/2021) PROF. FERRARO

Muy importante: Este examen corresponde a DNI terminado en 7.

1. Sean F, G, H tres conjuntos no vacíos, tales que $G \cap H \neq \emptyset$. Probar que $F \times (G \cap H) = (F \times G) \cap (F \times H)$.

2. Demostrar, usando el principio de inducción, que $6^n - 1$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Encontrar todas las raíces del polinomio $P(X) = X^6 + 3\sqrt{3}X^2 + 3iX^2$ y graficarlas en el plano complejo.

4. ¿Es cierto que una función $f\colon A \to B$ es inyectiva si y sólo si al considerar la relación de equivalencia asociada a f todas las clases de equivalencia tienen un solo elemento? Justificar claramente la respuesta.

5. ¿Existe alguna relación binaria en $\mathbb{R}$ que sea simétrica y antisimétrica pero no transitiva? Justificar claramente la respuesta.

6. Demostrar que $\sqrt[3]{250}$ es irracional. Si utiliza algún teorema, mencione cuál.

7. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   a) ¿Es posible hallar una base ortonormal formada por autovectores de T? Justificar la respuesta.

   b) Hallar los autovalores y los correspondientes autovectores asociados.

   c) ¿Es posible hallar una base B tal que $[T]_B$ sea diagonal? Justificar la respuesta.

8. *a*) Sean $a, b, p \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si p es un número primo, $p^2|b$ y $p|a^3 - b^2$ entonces $p|a$.

   b) Mostrar que si p no es primo, la afirmación del inciso anterior no es cierta en general.