PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA (29-04-24)

APELLIDO Y NOMBRE:	L.U.Nº:	NOTA:

Por favor realizar cada ejercicio (1 a 5) en hojas separadas.
Poner número de ejercicio y apellido en cada hoja.
Cant de hojas entregadas por ejercicio: 1) 2) 3) 4) 5)

1) (a) Sea $A = \{(1, \alpha, 1)\ , (-3, 3, 3\alpha)\ ,\ (-4, -\alpha, -10)\}$. Hallar todos los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que A sea una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Dadas las bases $B = \{(1, 2)\ ,\ (-1, 1)\}$ y $B' = \{(0, -1)\ ,\ (1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Hallar $(\overrightarrow{u})_B$ sabiendo que $(\overrightarrow{u})_{B'} = (2, 4)$

2) Dado el subespacio $T = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}) :\ A + A^T = O\right\}$. Indicar, si es posible,

   (a) una base de T que tenga dos elementos.

   (b) un sistema de generadores de T que tenga tres elementos.

3) Sean $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Hallar, suponiendo que existen todas las inversas necesarias, las matrices X e Y que verifican:

   i) $\left(3AX^T - B\right)^T = C$ ii) $CY = B - 2Y$

4) Dadas la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$ y las matrices $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Hallar

      i) $A = D.\ M^{-1}.\ D^T$ ii) F sabiendo que $(F)_B = (-2, 0, 1, 0)$

   (b) ¿Es A un elemento de $\overline{B}$?

5) Considerar la base $B = \left\{\overrightarrow{a}\ ,\ \overrightarrow{b}\right\}$ de E_2.

   (a) Representar geométricamente (en la hoja del enunciado) al vector $\overrightarrow{x} \in E_2$ que verifica: $5\overrightarrow{x} + 2\,\overrightarrow{b} = 3(\overrightarrow{x} + 2\,\overrightarrow{b}) - \overrightarrow{a}$

   (b) Hallar $[\overrightarrow{u}]_B$, siendo $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{a}$.