Matemática Aplicada	**Nombre y apellido:** ______________________
Examen Final,	**Registro:** ______________________
18 de agosto de 2021	**e-mail:** ______________________

1. (a) Probar que la función y_1 es solución de la ecuación diferencial dada. Utilizar el método de reducción del orden para hallar otra función, y_2, tal que $\{y_1, y_2\}$ formen una base del espacio de soluciones.

$$(x-1)^2 y'' + 4(x-1)y' + 2y = 0, \quad y_1(x) = (x-1)^{-1}.$$

(b) Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 4y = \cos x + 2\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

¿Existe algún valor de α para el cual el siguiente sistema tenga los dos autovalores iguales?

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + \alpha y_2 \end{cases}$$

2. Sabiendo que $\mathcal{L}(f(t))(s) = \cos(s)e^{-s^2}$ hallar $\mathcal{L}(e^{-2t}f(3t))(s)$.

3. Obtener el desarrollo de Fourier en serie de senos para

$$f(x) = x, \quad \text{para} \quad x \in [0, 2]$$

4. Decir si hay valores de α para que la función $f(x, y) = -\alpha x + x^2 + 2ixy - y^2$ sea analítica como función de la variable compleja $z = x + iy$.

5. Resolver la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

con $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$ y la siguiente condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & -\infty < 0 < -1 \\ (1+x)(1-x) & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < \infty \end{cases}$$