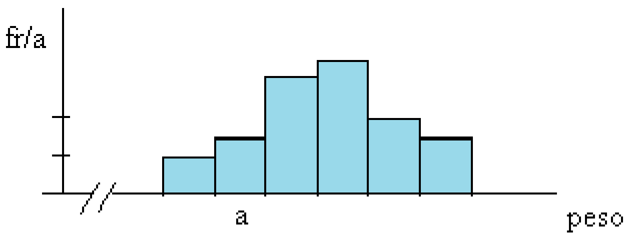
CAPÍTULO IV: Variables Aleatorias Continuas

Definición:
Una v.a. se dice **continua** si su rango consiste en uno o más intervalos de la recta de los reales.

Ejemplos:
1. X = “tiempo de duración, en horas, de cierto componente eléctrico”.
2. Y = “diámetro de un cable eléctrico medido en centímetros”.
3. Z = “voltaje medido en una red eléctrica (en voltios)”.
4. T = “gasto semanal en fotocopias en pesos de los estudiantes de estadística de Lic. en Ciencias de la Computación”.
5. V = “cantidad de sólidos (en mg/l) descargados a un río diariamente por cierta fábrica”.
6. E=”número de artículos a extraer hasta hallar el primero que no cumple con los estándares de calidad”.
7. W = “concentración de cierto contaminante en ppm”.

La distribución de probabilidad de una v.a. continua X está caracterizada por una función $f(x)$ que recibe el nombre de **función de densidad de probabilidad** (f.d.p). Proporciona un medio para determinar la probabilidad de un intervalo $a \leq X \leq b$.

La función de densidad de una variable aleatoria puede estimarse a partir de la frecuencia relativa. En el caso de X = “peso de adultos varones (en kg.)” se puede tomar una muestra al azar de dichos individuos, observar los valores de la variable aleatoria X, agruparlos en intervalos y representarlos mediante su correspondiente histograma. La altura de cada barra es igual a su frecuencia relativa (fr) dividida por el ancho de la barra (a). Por ejemplo:



Aumentando el tamaño de la muestra y disminuyendo la longitud del intervalo, las barras se angostan. Si en los sucesivos histogramas trazamos el polígono de frecuencias, se observa como las poligonales tienden a una curva cada vez más suave. La curva límite $f(x)$ que se obtiene para un número muy grande de observaciones y para una amplitud de intervalo muy pequeña, es la función de densidad de una variable aleatoria continua X.
El área correspondiente a cada barra de los sucesivos histogramas es igual a fr/a * a = fr. La suma de las áreas de todas las barras es 1 puesto que es igual a la suma de las frecuencias relativas. Por lo tanto, el área bajo la curva límite también es vale 1.
La función de densidad de una variable aleatoria continua X, $f(x)$, se define formalmente de la siguiente manera.

Definición:
Si existe una función $f(x)$ tal que:

(1) $f(x) \geq 0, \quad -\infty < x < \infty,$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \quad$ y

(3) $P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx \qquad \forall\, A \subseteq \Re.$

entonces $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua X.

En particular, si A = [a, b], entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ para cualesquiera a y b}$$

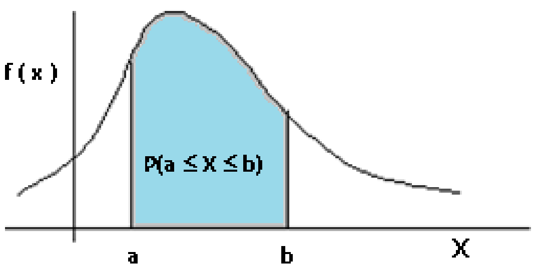
y

$$P(X = A) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Obsérvese que:

(1) Puesto que el área total bajo la $f(x)$ es uno, la probabilidad del intervalo $a \leq X \leq b$ es el área acotada por la función de densidad y las rectas X = a y X = b.

(2) $f(x)$ no representa la $P(X = x)$, sino el valor de la función en el punto x, que de hecho puede ser mayor que 1.

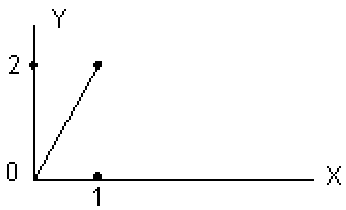


Probabilidad ilustrada como el área bajo la curva de densidad.

Ejemplo:

1. Verificar que la función f(x) satisface los puntos (1) y (2) de la definición anterior.
   Calcular $P(0.5<X<0.8)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Si $x \in (0, 1)$ entonces $f(x) = 2x > 0$, y para el resto de los valores de x la función está definida igual a 0. Por lo tanto, f(x) satisface la condición (1).

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} 2\, x\, dx + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 1$. Por lo tanto, f(x) satisface la condición (2).

$$P(0.5 < X < 0.8) = \int_{0.5}^{0.8} 2\, x\, dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0.5}^{0.8} = \left[(0.8)^2 - (0.5)^2\right] = 0.39.$$

2. Demostrar que la siguiente función f(x) es función de densidad para algún valor de k; determinar de k.

$$f(x) = \begin{cases} k\, e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dado que e^{-x} es positiva $\forall x \in \Re$, es necesario que k sea mayor que cero para que $f(x) \geq 0$.

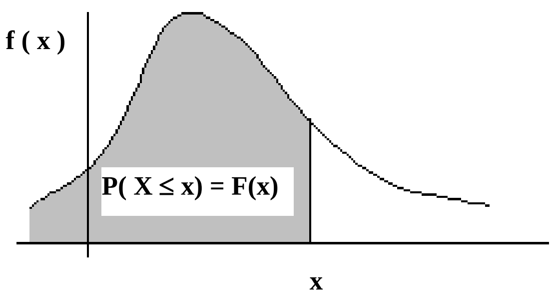
$$1 = \int_{0}^{+\infty} k\, e^{-\infty} dx = \lim_{b \to +\infty} k \int_{0}^{b} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} k\, (-e^{-x}) \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} k\, (-e^{-b} + 1) = k$$

Luego, k = 1, para que f(x) sea una función de densidad.

Definición:
La **función de distribución acumulada (f.d.a.)**, $F_X(x)$, de una v.a. continua X se define como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulativa $F_X(x)$ es el área que se encuentra bajo la función de densidad y acotada a derecha por la recta X = x.



Distribución acumulada ilustrada como el área bajo la curva de densidad.

Dado que para una variable aleatoria continua X se verifica que $P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)\, dt = 0$, entonces $P(X \leq x) = P(X < x) = F_X(x)$.

La distribución acumulada $F_X(x)$ es una función no decreciente de los valores de la v.a. con las siguientes propiedades:

(1) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

(2) $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(3) $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

(4) $\dfrac{dF_X(x)}{dx} = f(x).$

Ejemplo:
Hallar la función de distribución acumulada, $F_X(x)$, de la v.a. X cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $0 \leq x$ entonces $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Si $0 < x < 1$ entonces $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = 0 + 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = x^2 - 0 = x^2$

Si $x \geq 1$ entonces $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 0 + 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + 0 = (1^2 - 0) = 1$

Luego,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular $P(0.5 < X < 0.8)$ y $P(X \geq 0.7)$ utilizando la $F_X(x)$ hallada anteriormente.

$P(0.5<X<0.8) = F_X(0.8) - F_X(0.5) = (0.8)^2 - (0.5)^2 = 0.64 – 0.25 = 0.39.$

$P(X \geq 0.7) = 1 – P(X < 0.7) = 1 - F_X(0.7) = 1 - (0.7)^2 = 1 – 0.49 = 0.51$

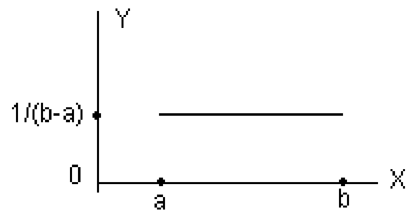
Ejercicio:
Hallar la f.d.a. $F_X(x)$ de la v.a. X del ejemplo 2.

Algunas variables aleatorias continuas particulares

Variable aleatoria uniforme

La variable aleatoria X está *distribuida uniformemente* en el intervalo [a,b], con a y b finitos y se denota X ~ U[*a*,*b*], si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$



Probar que se verifican las dos primeras propiedades de función de densidad.

Para cualquier subintervalo [c,d] tal que $a \le c \le d \le b$, la $P(c \le x \le d)$ es la misma para todos los subintervalos que tienen igual longitud. Esto es,

$$P(c \le x \le d) = \int_c^d f(x)\, dx = (d-c)/b-a$$

y por lo tanto sólo depende de la longitud del intervalo y no de la ubicación de este.

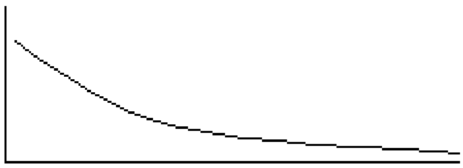
Ejercicio:
Se puede suponer que la dureza, H, de una muestra de acero (medido en la escala Rockwell) es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente sobre [50,70] en la escala B, por lo tanto la función de densidad es:

$$f(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{70-50} & \text{si} \quad 50 < h < 70 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(1) Obtenga la expresión de la función de distribución acumulada.
(2) Evalúe la probabilidad que la dureza de una muestra sea menor que 65 H.
(3) Evalúe la probabilidad que la dureza de una muestra de acero sea mayor que 62 H, si se comprobó que es mayor que 60 H.

Variable aleatoria exponencial
La v.a. X se dice que tiene una distribución exponencial de parámetro β y la notamos $X \sim Exp(\beta)$, si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{si } x \ge 0 \quad \beta > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Probar que se verifican las dos primeras propiedades de función de densidad.

Variable aleatoria gamma
La v.a. X se dice que tiene una distribución gamma de parámetros r y α, y la notamos Γ (r, α), si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las constantes α y r son mayores que cero y la expresión Γ (r) es:

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{definida para } r > 0$$

Se prueba que Γ (r) = (r-1)! si r es un entero positivo y

$$\Gamma(r) = (r-1)\,\Gamma(r-1) = (r-1)(r-2)\,\Gamma(r-2)$$

Si r = 1 la distribución gamma coincide con la exponencial:

$$\Gamma(1, \alpha) = \mathrm{Exp}(\alpha)$$

Esperanza o valor esperado de una variable aleatoria continua

Definición:
Sea X una v.a. continua, con f.d.p. f(x), **la esperanza o valor esperado de X** se define como:

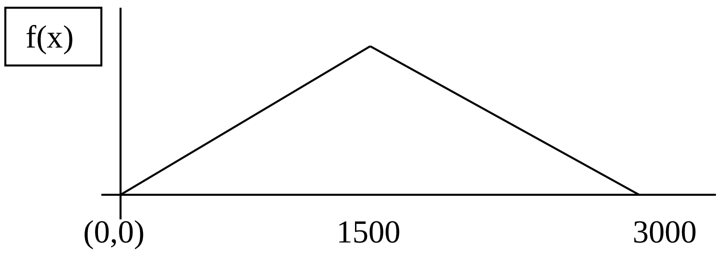
$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\,.$$

Siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx < \infty$. Si esta integral no converge a un valor finito el valor esperado no puede definirse y se dice que no existe.

Interpretación de la esperanza: Si una masa unitaria está distribuida continuamente en una recta, y si f(x) representa la densidad de masa entonces la E(X) se puede interpretar como el centro de la masa.

Ejemplo:
Sea X una v.a. que indica el tiempo (en minutos) durante el cual un dispositivo eléctrico se utiliza a su máxima carga cierto período de tiempo determinado. La f.d.p está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x/(1500)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1500 \\ (3000-x)/(1500)^2 & \text{si} \quad 1500 \le x \le 3000 \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases}$$



Entonces la esperanza de X es:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = (1500)^{-2}\left[\int_{0}^{1500} x^2 dx + \int_{1500}^{3000} x(3000-x)dx\right] = 1500 \text{ minutos}$$

El *tiempo promedio* durante el cual un dispositivo eléctrico se utiliza a su máxima carga cierto período de tiempo determinado es de 1500 minutos.
Ejemplo:
El contenido de ceniza en cierto tipo de carbón (en porcentaje), X, es una v.a. continua con f.d.p:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/4875 & \text{si} \quad 10 \le x \le 25 \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases}$$

Luego su esperanza es:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = (4875)^{-1} \int_{10}^{25} x^3 dx = 19.5\,\%.$$

Por lo tanto, el contenido promedio de ceniza en el tipo de carbón considerado es de 19.5%.

Ejercicio:
Sea X una v.a. con distribución uniforme en [3,5]. Calcular la E(X).

Proposición:
Si X es una v.a. continua, entonces h(X) es una v.a. continua.

Proposición:
Sea X una v.a. continua e Y = h(X) una función real de la v.a. X. Sea f(x) la f.d.p. de X entonces entonces la esperanza de la función h(X), está dada por,

$$E(Y) = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f(x)\, dx$$

si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, f(x)\, dx < \infty$. Si esta integral no converge a un valor finito el valor esperado no puede definirse y se dice que no existe.

Propiedades de la esperanza:
(1) Sea c un número real cualquiera $\Rightarrow$ E(c) = c
(2) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = X + k $\Rightarrow$ E(Y) = E(X) + k
(3) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que Y = kX $\Rightarrow$ E(Y) = k E(X)
(4) Sean X e Y v.a. $\Rightarrow$ E(X + Y) = E(X) + E(Y)

Propiedad de linealidad:
Si Y = h(X) = aX+b , X v.a. continua, a y b constantes reales entonces:

$$E(Y) = E[h(X)] = E(aX+b) = a.E(X)+b.$$

Ejemplo:
Sea X una v.a. con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2}x$ si $0 \le x \le 2$ y $E(X) = \frac{4}{3}$. Si Y = - X + 3, entonces, aplicando la propiedad de linealidad la E(Y) es:

$$E(Y) = E(- X + 3) = (-1)\, E(X) + 3 = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{-4+9}{3} = \frac{5}{3}.$$

Varianza de una variable aleatoria continua

La esperanza de una v.a. X determina el lugar donde se centra la distribución de probabilidad, pero no proporciona información acerca de la forma de la distribución. La medida más usada de variabilidad de una v.a. es la varianza. Esta se define a partir de la esperanza, de esa manera vamos a utilizar los resultados obtenidos para la esperanza.

Definición:
Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(x) y esperanza μ_X, la **varianza de X**, que se denotará V(X), σ_X^2 ó σ^2 , se define como

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \; f(x)\, dx = E\left[\, (X - \mu_X)^2 \right] = E\left[\, (X - E(X))^2 \right] = E(X^2) - (E(X))^2$$

La **raíz cuadrada positiva de la varianza,** σ_X**,** se denomina **desvío estándar** y es también una medida de dispersión, con la ventaja sobre la varianza que tiene las mismas unidades que la correspondiente v.a.

Ejemplo:
La demanda semanal de un determinado lubricante para automóvil de una ciudad, es una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para el resto.} \end{cases}$$

Para determinar la varianza de la v.a. X se utiliza la expresión $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, siendo necesario calcular E(X) y $E(X^2)$.

$$E(X) = \mu_X = 2 \int_1^2 x\, (x-1)\, dx = 2 \int_1^2 (x^2 - x)\, dx = 2\left(x^3/3 - x^2/2 \right) \Big|_1^2 = 5 / 3$$

$$E(X^2) = 2 \int_1^2 x^2\, (x-1)dx = 2 \int_1^2 (x^3 - x^2)\, dx = 2\left(x^4/4 - x^3/3 \right) \Big|_1^2 = 17 / 6$$

Por lo tanto,

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 17/6 - (5/3)^2 = 1/18.$$

Propiedades de la varianza:
(1) Si c es número real cualquiera $\Rightarrow V(c) = 0$.
(2) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = X + k \Rightarrow V(Y) = V(X)$.
(3) Sea X v.a. y k un número real cualquiera tal que $Y = kX \Rightarrow V(Y) = k^2\, V(X)$.

En particular, si $Y = h(X) = aX+b$, X v.a. continua, a y b constantes reales entonces:

$$V(Y) = V[h(X)] = V(aX+b) = a^2\, V(X).$$

Ejercicio:
Sea X una v.a. con $E(X) = \mu_X$ y $V(X) = \sigma_X^2$, calcular la esperanza y la varianza de la v. a. $Z = (X - \mu_X) /\sigma_X$.

Distribución Normal

La función de densidad de probabilidad de la distribución normal fue descubierta por De Moivre en 1733 como una forma límite de la función de probabilidad binomial. Desafortunadamente su trabajo se perdió por algún tiempo, y Karl Gauss desarrolló, de manera independiente, la distribución normal casi 100 años después como modelo para la distribución de frecuencia relativa de errores, como errores de medición.

Esta distribución, llamada también Gaussiana, es indudablemente la más importante y la más utilizada entre todas las distribuciones continuas de probabilidad. En la aplicación de la inferencia estadística en el análisis de datos, la distribución normal resulta ser fundamental puesto que las distribuciones de muchos estadísticos muestrales tienden a ella conforme crece el tamaño de la muestra. Proporciona una adecuada representación de las distribuciones de una gran cantidad de variables físicas, que incluyen datos meteorológicos tales como la temperatura y la precipitación pluvial, mediciones efectuadas en organismos vivos, mediciones físicas de partes manufacturadas, errores de instrumentación, etc.

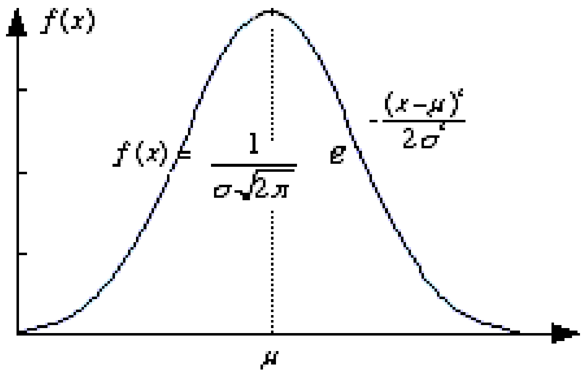
Variable aleatoria normal

Una v.a. X se dice que tiene una distribución normal de parámetros μ y σ^2, y se denota $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \frac{e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \qquad -\infty < x < \infty, \qquad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

Características de la función de densidad:

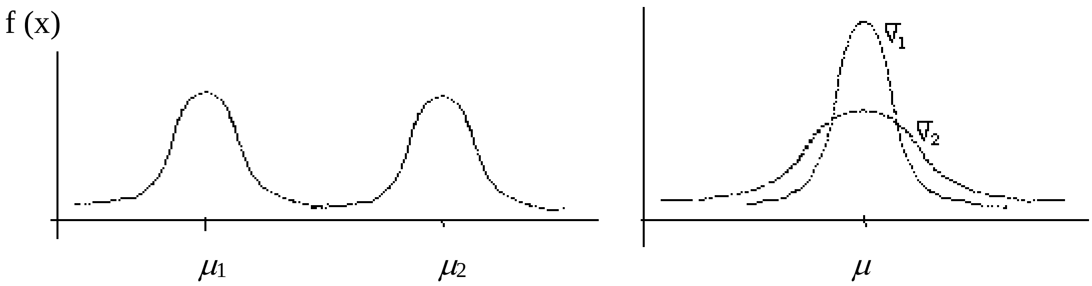
- Es una curva simétrica con forma de campana, que se extiende sin límite tanto en la dirección positiva como negativa de la recta real.
- El eje de simetría está dado por la recta de ecuación $x = \mu$.
- El valor máximo de la función de densidad es $1/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ y se alcanza en $x = \mu$.
- Es creciente si $x \in(-\infty, \mu]$, y decreciente si $x \in [\mu, +\infty)$.
- Los puntos de inflexión de la curva se encuentran en $x = \mu+\sigma$ y $x = \mu-\sigma$.



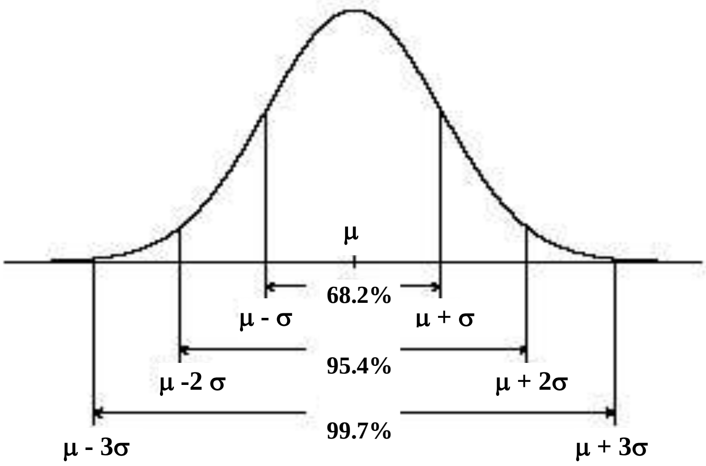
Función de densidad de una distribución normal.

Los parámetros de la distribución normal μ y σ^2 determinan de manera completa la función de densidad de probabilidad. Estos parámetros representan la media y la varianza de la v.a. X, respectivamente.

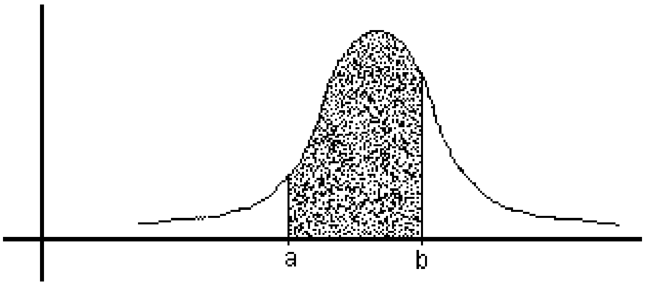
Las siguientes figuras ilustran funciones de densidad normal con distintos parámetros. En la primera figura las curvas de densidad tienen el mismo desvío estándar σ pero distinta media μ, las curvas tienen idéntica forma pero están centradas en diferentes puntos. En la segunda, las curvas tienen la misma media μ y distinto desvío estándar lo cual determina que estén centradas en el mismo punto y una sea más aplastada que la otra.



Los valores de la variable X se agrupan con mayor probabilidad alrededor del valor μ y con menor probabilidad se alejan de este valor.
El 68.2% de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm \sigma$.
El 95.4% de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 2\sigma$.
El 99.7% de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 3\sigma$.



La probabilidad que X tome valores entre dos números fijos a y b, $P(a \leq X \leq b)$ es el área acotada por la función de densidad y las rectas X = a y X = b,



y se calcula mediante:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dx\ .$$

Sin embargo, como se verá a continuación, es posible obtener estas probabilidades partir de una tabla sin necesidad de recurrir al cálculo de integrales.

Definición:
Una variable aleatoria normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, recibe el nombre de **variable aleatoria normal estándar** y se denota con la letra Z.

Los valores de probabilidad de la v.a Z se obtienen a través de la app “Probability Distribution” desarrollada por Matt Bogna, y mediante el empleo de las reglas básicas de probabilidad y de la simetría de la distribución normal. Tiempo atrás se utilizaba una tabla que permitía aproximar las probabilidades de una v.a. normal estándar.

Ejemplo:
El ángulo (en radianes) que forma la dirección del viento con el Norte magnético terrestre, en una determinada región y durante un determinado período, es una variable aleatoria con distribución normal con media 0 y desvío 1.

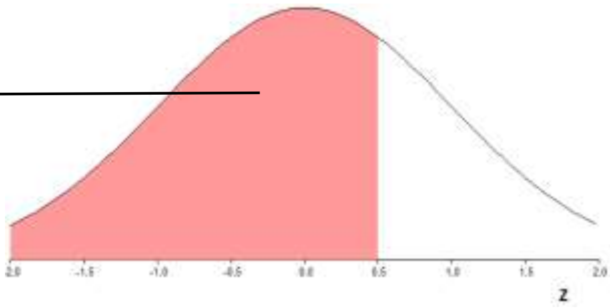
Calcular la probabilidad de obtener una posición cuyo ángulo sea:

i) menor que 0.5
ii) mayor que -1.8
iii) igual a 1.96
iv) entre -1.02 y 1.48
v) menor que -1.2 ó mayor que 0.58.
vi) menor que 0.5 dado que es mayor que -1.8

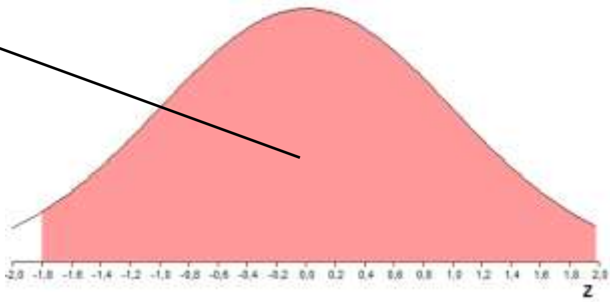
Los resultados se obtuvieron a través de la app “Probability Distribution”, y considerando la variable aleatoria con distribución normal estándar:

Z = “*Angulo (en radianes) que forma la dirección del viento con el Norte magnético terrestre, en una determinada región y durante un determinado período*”, $Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1^2)$,

i) $P(Z < 0.5) = 0.69146$.

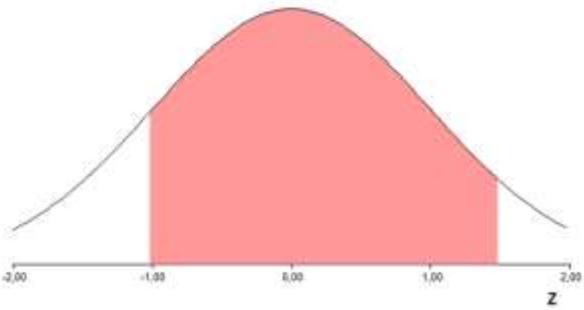


ii) $P(Z > -1.8) = 0.96407$

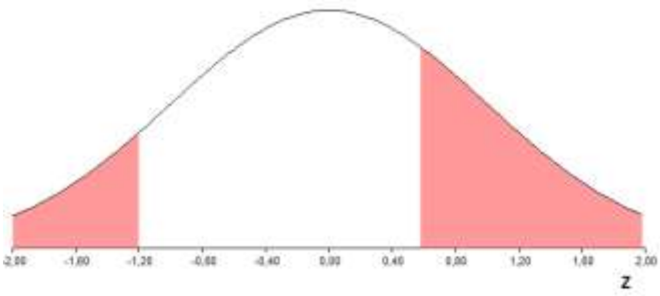


iii) $P(Z = 1.96) = 0$. En v. a. continuas, la probabilidad en un calculada en punto es igual a 0.

iv) $P(-1.02 < Z < 1.48) = P(Z \leq 1.48) - P(Z \leq -1.02)$
$= 0.93056 – 0.15386 = 0.7767$.



v) $P(Z < -1.2 \cup Z > 0.58) = P(Z < -1.2) + P(Z > 0.58) = 0.11507 + 0.28096 = 0.39603$.



vi) $P(Z < 0.5 / Z > -1.8) = P(-1.8 < Z \cap Z < 0.5) / P(Z > -1.8) = P(-1.8 < Z < 0.5) / P(Z > -1.8)$

$= [\ P(Z < 0.5) - P(Z < -1.8)\ ] / 0.96407$

$= [\ 0.69146 – 0.03593] / 0.96407 = 0.65553 / 0.96407 = 0.68.$

Para el mismo ejemplo puede resultar de interés calcular el valor de la variable que satisface ciertas condiciones.

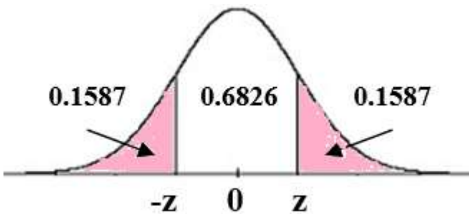
Hallar el valor de z tal que:

i) $P(Z \le z) = 0.5948$ ii) $P(Z \ge z) = 0.7019$ iii) $P(-z \le Z \le z) = 0.6826$

i) Si $P(Z \le z) = 0.5948$, indicando la probabilidad correspondiente en la app, se obtiene un valor z = 0.23991.

ii) $P(Z \ge z) = 0.7019$ por lo tanto, indicando la probabilidad correspondiente en la app, se obtiene un valor z = -0.52987.

iii)$P(-z \le Z \le z) = 0.6826$. Como la probabilidad 0.6826 representa el área bajo la curva de densidad y acotada entre las rectas Z = -z y Z = z, (1 – 0.6826) = 0.3174 representa la suma de las áreas de las colas de la curva normal comprendida por los intervalos: $(-\infty, -z)$ y $(z, +\infty)$.



Para hallar los valores de z pedidos, basta indicarle como dato a la App que: $2P(Z \le |z|) = 0.3174$, por lo tanto corresponde a un valor de -z = -0.99982 y luego z = 0.99982.

Anteriormente, como sólo se disponía de una tabla para el cálculo de probabilidades de una v.a. normal estándar, para determinar las probabilidades de una v.a. normal con media μ y varianza σ^2, no estándar se empleaba de la siguiente transformación:

Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, entonces la variable aleatoria $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ tiene un distribución N(0,1). Esta transformación se conoce como ***estandarización*** de la variable aleatoria X.

Por lo tanto, si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, mediante la estandarización podemos calcular la probabilidad de que X sea menor o igual a x:

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z)$$

buscando en la tabla de distribución normal estándar el área acumulada hasta el valor z, con $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$.

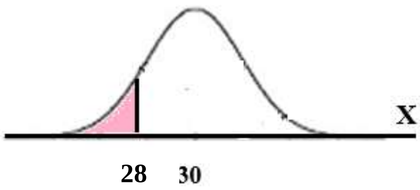
Actualmente, mediante la App Probability Distribution o utilizando un software, no es necesario la *estandarización* para calcular probabilidades de una v.a. Normal no estándar.

Ejemplo:
Una línea de transporte de larga distancia ha determinado que el peso del equipaje por pasajero sigue una distribución normal con **media** 30 kg. y **desvío estándar** de 4 kg.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso del equipaje por pasajero sea inferior a 28 kg.?
ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso del equipaje por pasajero sea inferior a 26 kg. o superior a 32 kg.?
iii) ¿Cuál es el peso mínimo del 40% de los equipajes de mayor peso?

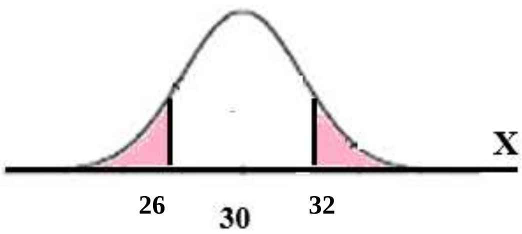
Sea X = peso del equipaje por pasajero (kg.). $X \sim N(\mu = 30, \sigma^2 = 16)$.

i) $P(X < 28) = 0.3085$.



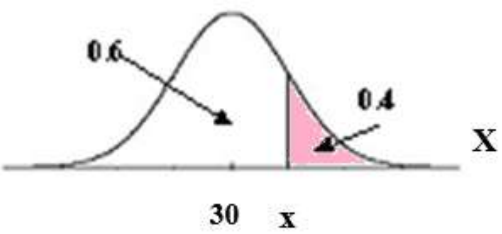
El 30.854% de los pasajeros transportan equipaje cuyo peso es inferior a 28 kg.

ii) $P(X < 26) + P(X > 32) = 0.1587 + 0.3085 = 0.4672$.



El 46.72% de los pasajeros transportan equipaje cuyo peso es inferior a 26 kg. o superior a 32 kg.

iii) $P(X \geq x) = 0.40$



$0.40 = P(X \geq x)$ luego según la App, $x = 31.0134$. El 40% de los equipajes de mayor peso, pesan como mínimo 31.01 kg.

Ejercicios:

1. Cierto tipo de batería dura en promedio 3 años, con un desvío estándar de 0.5 años. Suponiendo que las duraciones de las baterías se distribuyen en forma normal, encontrar la probabilidad de que una determinada batería dure menos de 2.3 años.
Rta: 0.08.

2. Cierta máquina produce resistencias eléctricas que tienen un valor medio de 40 ohms y un desvío estándar de 2 ohms. Suponiendo que los valores de las resistencias siguen una distribución normal y que pueden medirse con cualquier grado de precisión, ¿qué porcentaje de las resistencias tendrá un valor que exceda de 43 ohms?
Rta.: 0.068.

3. Una compañía fabrica focos cuya duración está normalmente distribuida con una media igual a 800 horas y un desvío estándar de 40 horas. Encontrar la probabilidad de que un foco se queme entre las 778 y 834 horas de uso.
Rta.: 0.51.

4. Se sabe que el coeficiente intelectual, C.I., se distribuye normalmente con $\mu = 100$ y $\sigma = 10$. Hallar la probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un CI comprendido entre 90 y 120.
Rta.: 0.8186.

5. Una máquina produce tornillos cuyos diámetros se distribuyen normalmente con media $\mu = 1/2$ pulgada y un desvío estándar $\sigma = 0.01$ pulgadas. ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo elegido aleatoriamente tenga un diámetro comprendido entre 0.48 y 0.52 pulgadas? Si los tornillos son descartados cuando el diámetro es menor que 0.47 o mayor que 0.53, ¿Cuál es la probabilidad de producir un tornillo que sea descartado?
Rta.: 0.9545, 0.0027.

6. La duración de cierto tipo de motor pequeño es de 10 años con un desvío estándar de 2 años. El fabricante repone sin cargo todos los motores que fallen dentro del período de garantía. Si está dispuesto a reponer sólo el 3% de los motores que fallan, ¿cuál será el tiempo de garantía que otorgue? Rta.: 6.24 años.

Fin Capítulo IV