Métodos de Computación Científica

Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Segundo Cuatrimestre de 2025

Primer Parcial - 2025

Apellido y No[redacted]
Cantid[redacted]

Realice cada ejercicio en hoja separada

Ejercicio I –Errores

1) Dada la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 + x_2^3}$$

y los puntos aproximados $\bar{\bar{x}}_a$ y $\bar{\bar{x}}_b$

$$\bar{\bar{x}}_a = \begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \bar{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}03 \pm 0{,}005 \\ -2{,}01 \pm 0{,}0005 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{x}}_b = \begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \bar{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}03 \pm 0{,}005 \\ 2{,}01 \pm 0{,}0005 \end{bmatrix}$$

a) Utilice la *Fórmula general de Propagación de Errores* para encontrar una ***Cota para el Error absoluto*** al calcular $f(\bar{\bar{x}}_a)$ y $f(\bar{\bar{x}}_b)$.
b) Determine una ***Cota para el Error relativo*** que se obtiene al calcular $f(\bar{\bar{x}}_a)$ y $f(\bar{\bar{x}}_b)$.
c) Obtener el número de **decimales correctos** y el número de **cifras significativas correctas** que pueden asegurarse al calcular $f(\bar{\bar{x}}_a)$ y $f(\bar{\bar{x}}_b)$. ¿Cuál sería su conclusión ?

__Obs__: Utilice el máximo número de decimales que pueda para resolver las cuentas, y exprese en el papel los números redondeados a, al menos, 5 decimales.

2)
a) Enuncie la fórmula del *Número de Condición* para una función genérica $f(x)$.
b) Calcule el *número de condición* de la siguiente función y halle los intervalos para los cuales f(x) estaría mal condicionada.

$$f(x) = \frac{1}{(1-X)}$$

¿Qué puede decir de esta función?

Ayuda para el cálculo de derivadas
- si transforma $f(x)$ en $f(u)$ con $u = u(x)$, entonces $\frac{\delta f}{\delta x_1} = \frac{\delta f}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x_1}$ y $\frac{\delta f}{\delta x_2} = \frac{\delta f}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x_2}$
- si $f(u) = u^n$ $\frac{\delta f}{\delta u} = n.u^{n-1}$

Ejercicio II - Álgebra y Norma

1) Dadas las siguientes matrices no-singulares:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Utilice propiedades para calcular los ítems a), b) de la forma más eficiente posible **utilizando propiedades**. Procure no calcular inversas u otras operaciones que puedan evitarse (productos, transpuestas, etc). Enuncie en cada paso las propiedades utilizadas para la correspondiente resolución:

a) $\det(A^{-1} * B^{T})$

b) $[\,(A^{T})^{-1} * (B^{T})^{T}\,]^{-1}$

2) Calcular el *Radio Espectral* de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Enuncie las propiedades que debe cumplir una función para conformar una ***Norma de Matrices.***

4) Estudie dichas propiedades para determinar si la función $\|.\|_{\theta} = 2\,(\max\{\,|a_{ij}|\,\})^2$, para $1 \leq i,j \leq n$, podría ser una Norma de Matrices.

En caso de ser necesario, utilice las siguientes matrices como ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Calcule el **Número de Condición** de la siguiente matriz A, utilizando $\|\mathbf{A}\|_{\infty}$ (norma infinita)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1000 & 1000 \end{bmatrix} \quad \text{cuya inversa es} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}0005 \\ -0{,}5 & 0{,}0005 \end{bmatrix}$$

¿Qué indica este valor de $K(A)$ obtenido? Justifique.

Ejercicio III Métodos Directos

Dada la siguiente matriz A y el vector b

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) ¿Puede asegurar que A admite *factorización* LU? Justifique su respuesta.

b) ¿Puede asegurar que A admite *factorización de Cholesky*? Justifique su respuesta.

c) Si A admite *factorización de Cholesky*, encuentre dicha factorizacióm y resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, utilizando dicha factorización.

d) Verifique la solución del sistema, es decir, que se cumple la igualdad $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.