Unidad II

Variables Aleatorias continuas.

Distribución de Variables Aleatorias continuas.

Distribución Uniforme. Distribución Exponencial. Distribución Normal

Variable continua

Def.

Una v.a. se dice **continua** si su rango es el conjunto de todos los valores pertenecientes a uno o más intervalos de la recta de los reales.

Ejemplos

X = "gasto semanal en fotocopias, en pesos, de un alumno de estadística de la carrera Ing. en Computación".

Y = "tiempo de ejecución de un algoritmo (en segundos)".

V = "vida útil (en años) de un chip de memoria de una computadora".

W = "velocidad de descarga en internet (en megabits por segundo)".

Variable continua

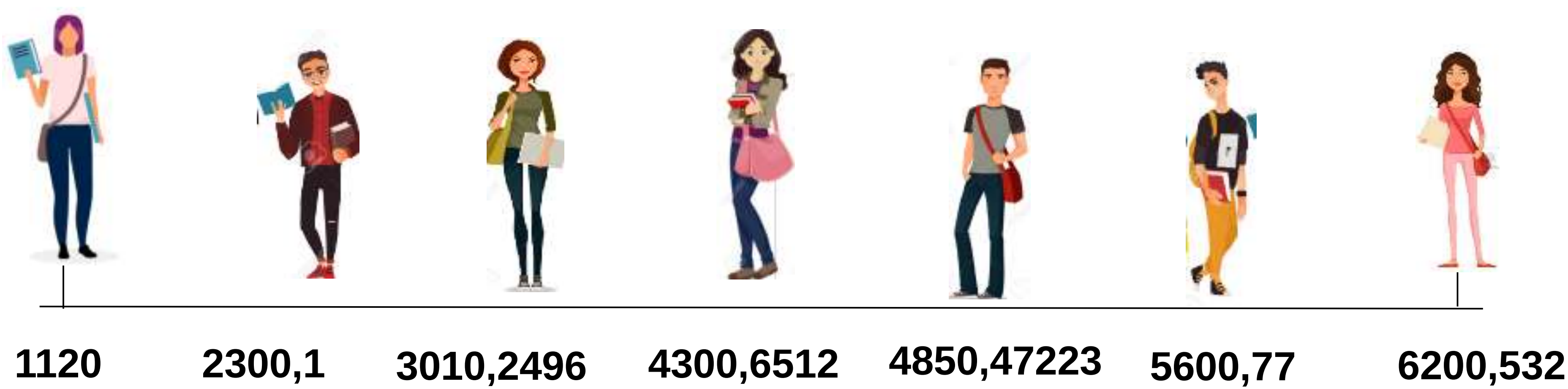
Def.

Una v.a. se dice **continua** si su rango es el conjunto de todos los valores pertenecientes a uno o más intervalos de la recta de los reales.

Ejemplo

X = “gasto semanal en fotocopias, en pesos, de un alumno de estadística de la carrera Ing. en Computación”.

¿Cuál es su recorrido?

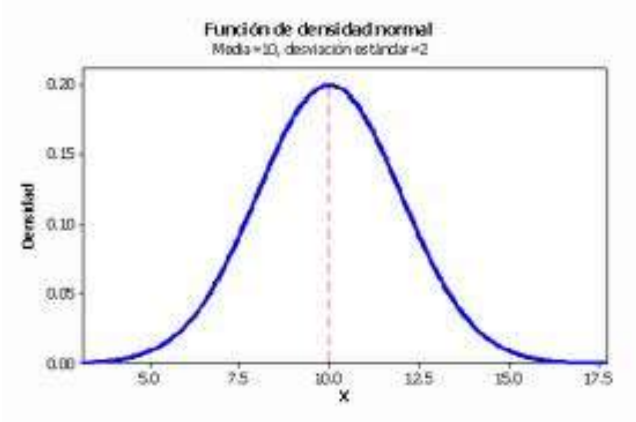


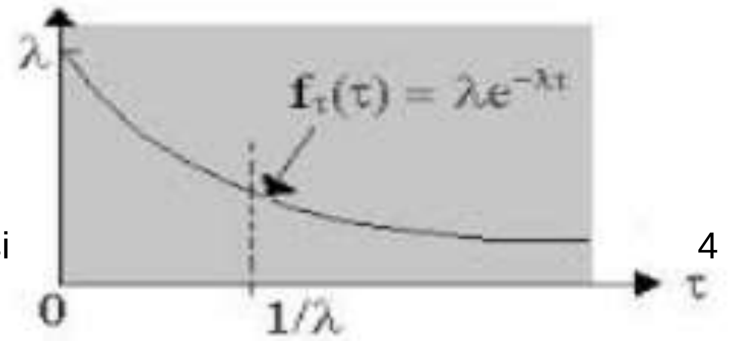
Variable continua

Función de densidad

La distribución de probabilidad de una v.a. continua **X** se caracteriza por medio de una **función f(x)** que recibe el nombre de ***función de densidad de probabilidad*** (f.d.p). Proporciona un medio para determinar la probabilidad de un intervalo a ≤ **X** ≤ b.

La ***función de densidad*** de una v. a. continua puede estimarse a partir de la ***frecuencia relativa***.



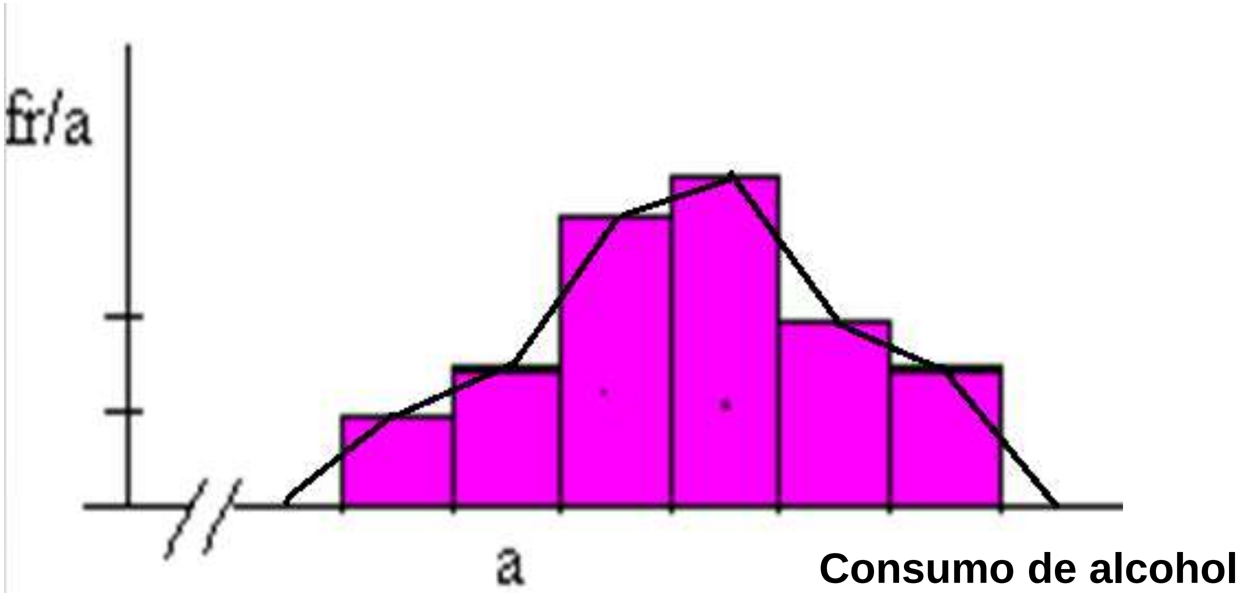


Supongamos que tenemos la v.a.

X = "*consumo de alcohol de un joven por fin de semana (en litros)*"

Tomamos una muestra al azar de jóvenes, y agrupamos los valores observados de la v.a. **X** en intervalos y representamos la información mediante su correspondiente histograma.

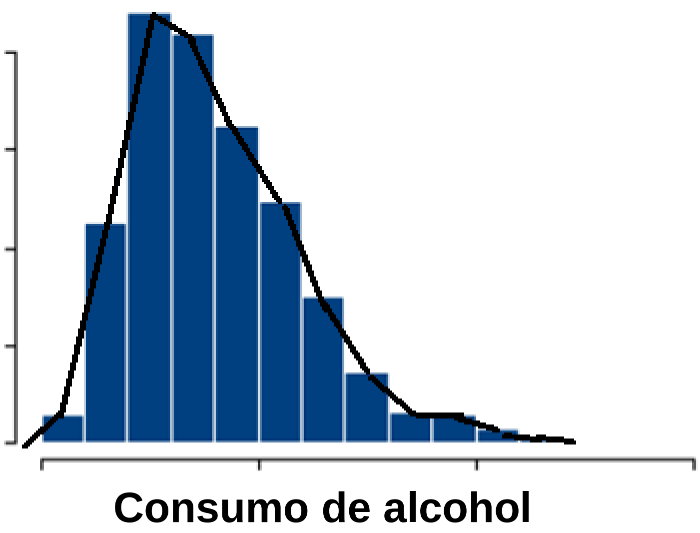
La **altura** de cada barra es igual a su **frecuencia relativa** (fr) dividida por el **ancho de la barra** (a).

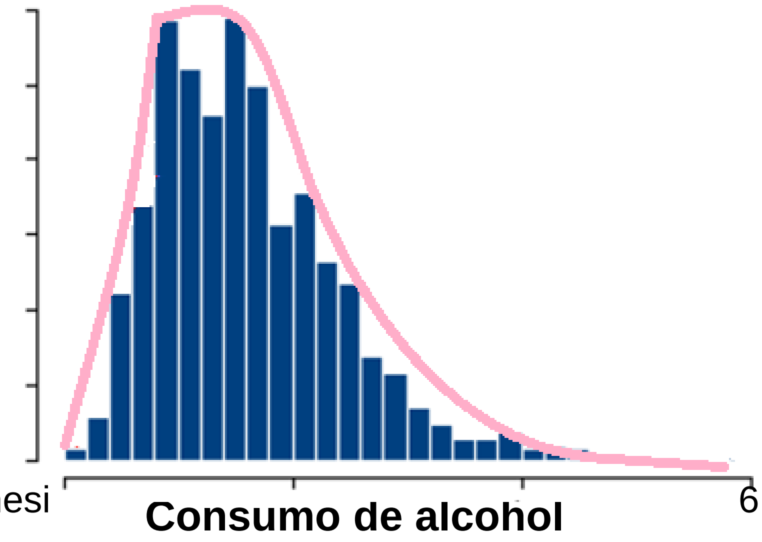


Función de densidad

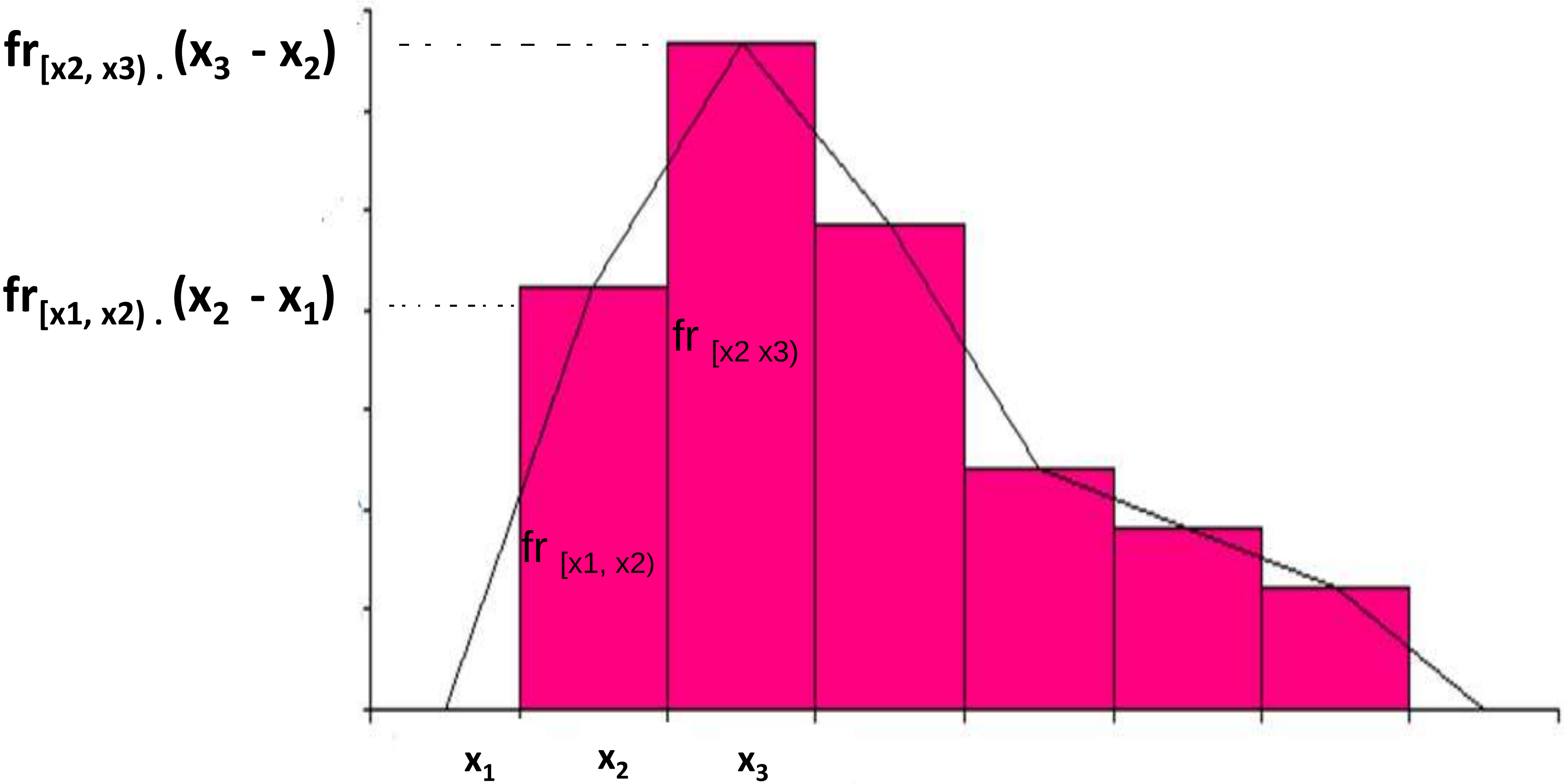
Si Aumentamos el tamaño de la muestra, se va disminuyendo la longitud de cada intervalo, y las barras se angostan. Si en los sucesivos histogramas trazamos el **polígono de frecuencias**, se observa como las poligonales tienden a una **curva** cada vez más suave.

Dicha curva es la **función de densidad** de la v.a. X, **f(x)**.





X = *"consumo de alcohol de un joven por fin de semana (en litros)"*



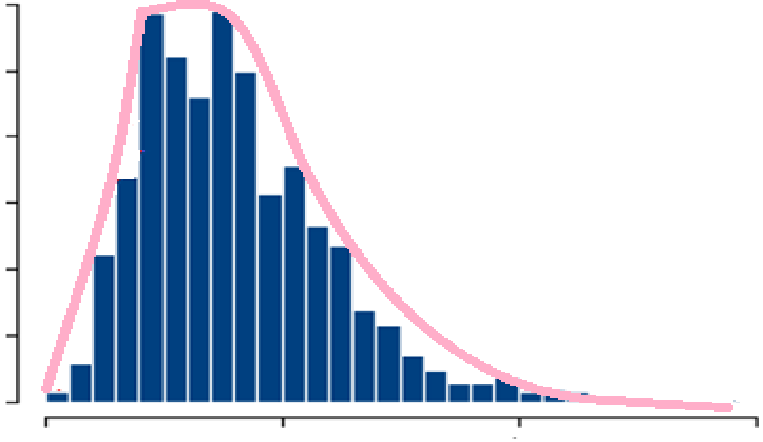
Área de la barra 1 = **base . altura** = $(x_2 – x_1) . fr_{[x1, x2)} /(x_2 - x_1)$ = $fr_{[x1, x2)} \cong$ **$P(x_1 \leq X < x_2)$**

Área de cada barra = base . altura = fr $_{[xi,\ xi+1)}$ $\cong$ **$P(x_i \leq X < x_{i+1})$**

Suma de las Áreas de todas las barras $= \sum_i$ fr $_{[xi,\ xi+1)}$ **= 1**

La **suma** de las **áreas** de **todas** las **barras** es **1** puesto que es igual a la suma de todas las **frecuencias relativas**.

Por lo tanto, el **área** bajo la **curva límite**, **función de densidad**, también es **1**.



Área bajo la función de densidad es 1.

Función de densidad

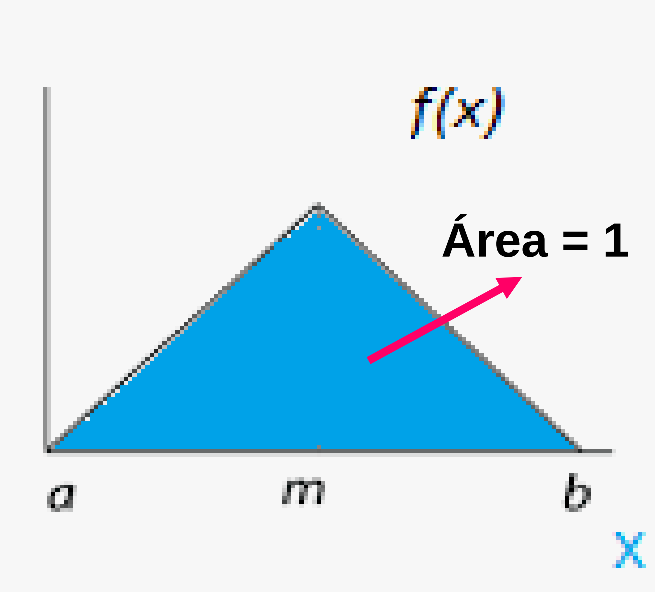
Def.

Si existe una función **f(x)** tal que:

$$1.\ \mathbf{f(x)} \geq 0, \quad -\infty < \mathbf{x} < \infty,$$

$$2.\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x)\,dx} = 1,$$

(El área bajo la curva desde - ∞ a + ∞ es 1)

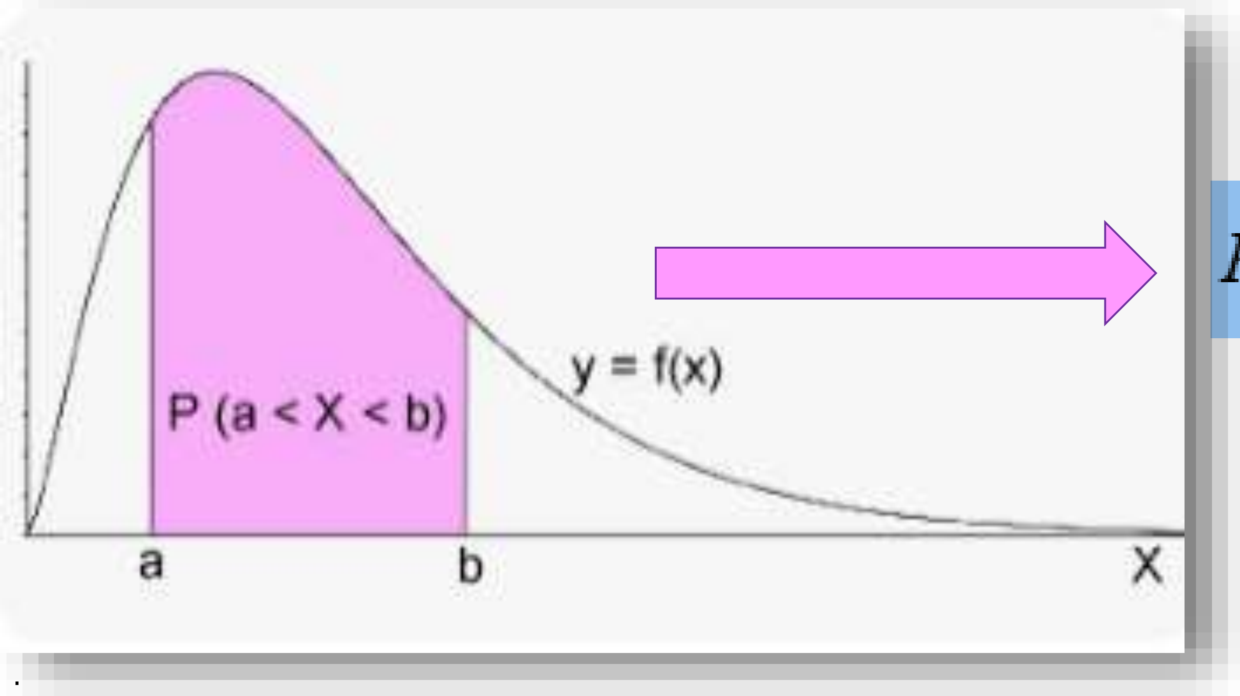


Entonces **f(x)** es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua **X**.

Luego la probabilidad de que la v.a. **X** esté entre a y b, a y b $\in$R.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Representa el **área** acotada por la función de densidad y las rectas **X** = a y **X** = b.



$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

.

Importante!!!!!!

$$P(X = a) = P(a \le X \le a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

La **probabilidad puntual** en una v.a. continua **X** es **nula** para todo $x \in R_X$.

Ejemplo

El tiempo, en minutos, que se necesita para reiniciar un determinado sistema es una v.a. continua, X, con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} c - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de la constante **c** para que f(x) sea una función de densidad.

b) Calcular la probabilidad de que se tarda entre 1 y 2 minutos en reiniciarse.

Ejemplo

1. Hallar el valor de la constante **c** para que f(x) sea una función de densidad.

La v.a. de interés es,

X ="tiempo, en minutos, que se necesita para reiniciar un determinado sistema"

f(x) es una función de densidad si satisface

$$\begin{cases} 1.\ f(x) \geq \mathbf{0}, \quad -\infty < \mathbf{x} < \infty, \\ \mathbf{2.}\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(x)\,dx} = 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} c - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

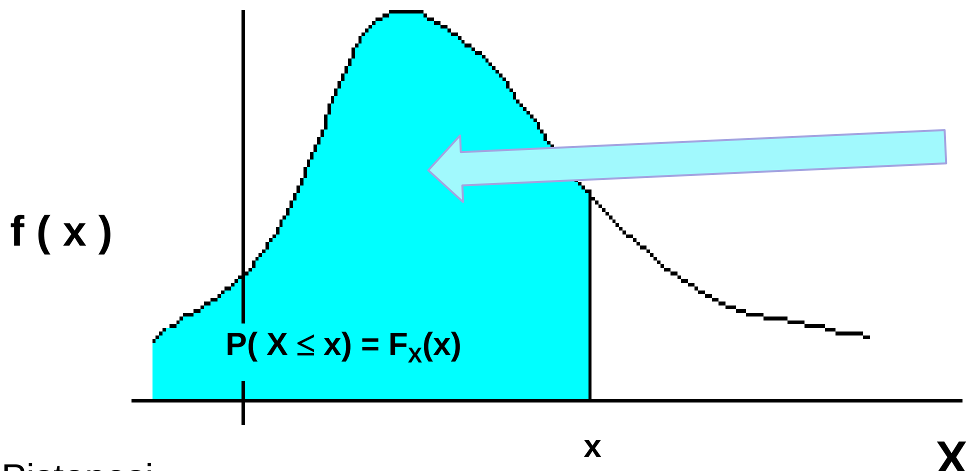
Función de Distribución acumulada

Def.:

La función de distribución acumulada (f.d.a.), $F_X(x)$, de una v.a. continua X se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

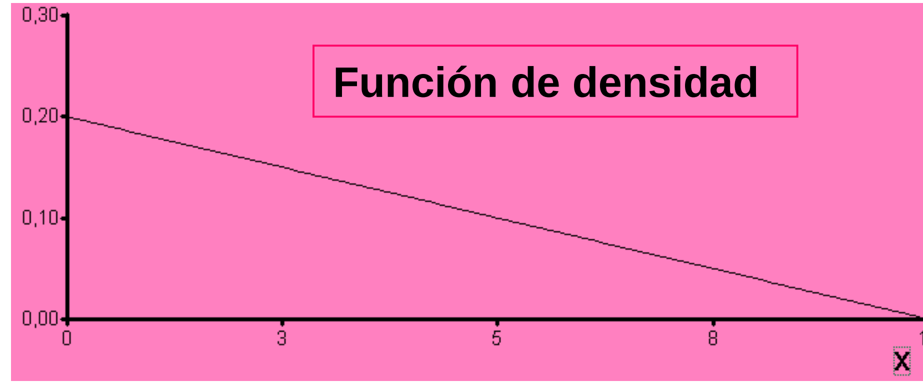
La función de distribución acumulada de la v.a. X, evaluada en x, **$F_X(x)$,** representa el área que se encuentra bajo la **función de densidad** acotada a derecha por la recta **X** = x.



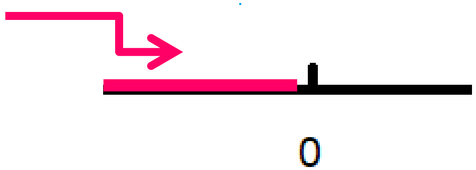
Distribución acumulada hasta x, geométricamente representa ***el área bajo la curva de densidad f(x) acumulada a izquierda del valor x.***

Función de Distribución acumulada

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

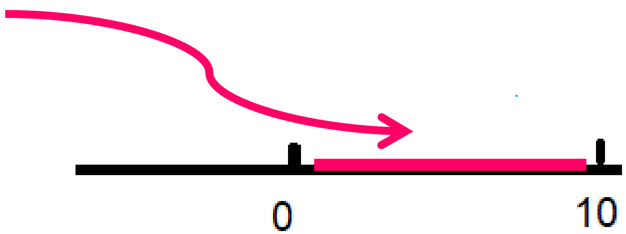


Si $x_0 \leq 0$



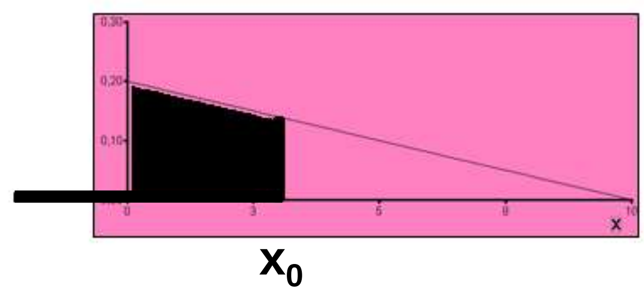
$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x_0} 0\,dt = 0$$

Si $0 < x_0 < 10$



$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt =$$

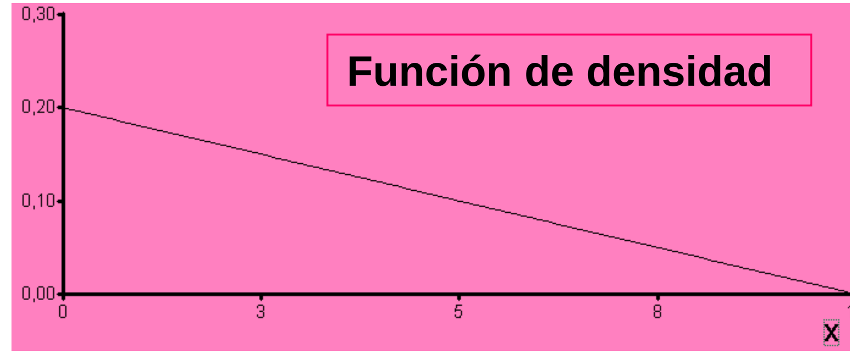
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x_0} (0.2 - 0.02t)\,dt = 0.2x_0 - \frac{x_0^2}{100}$$



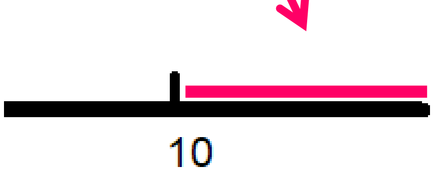
Silvina Pistonesi

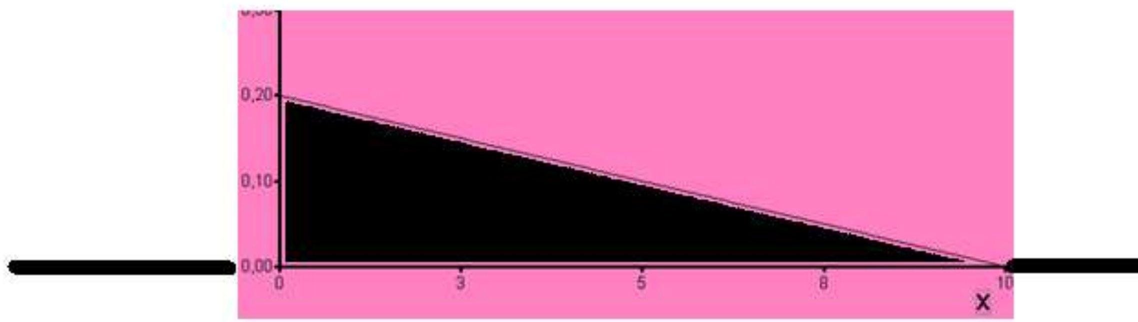
Función de Distribución acumulada

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Si $x_0 \geq 10$



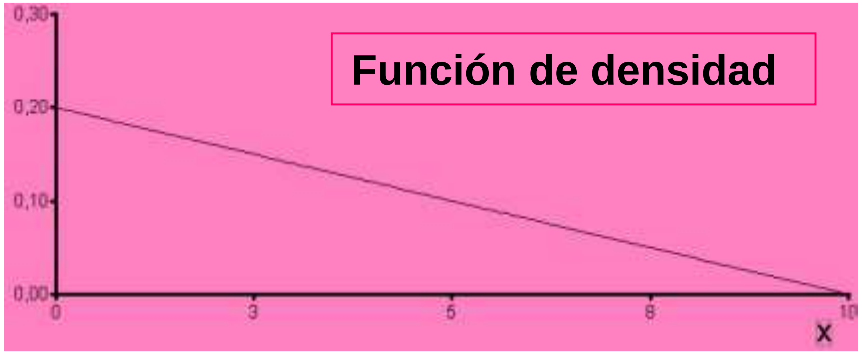


$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{10} (0.2 - 0.02t)dt + \int_{10}^{x_0} 0\, dt \quad = 1$$

Función de Distribución acumulada

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Si $x \leq 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Si $0 < x < 10$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} (0.2 - 0.02t)\,dt = 0.2x - \frac{x^2}{100}$$

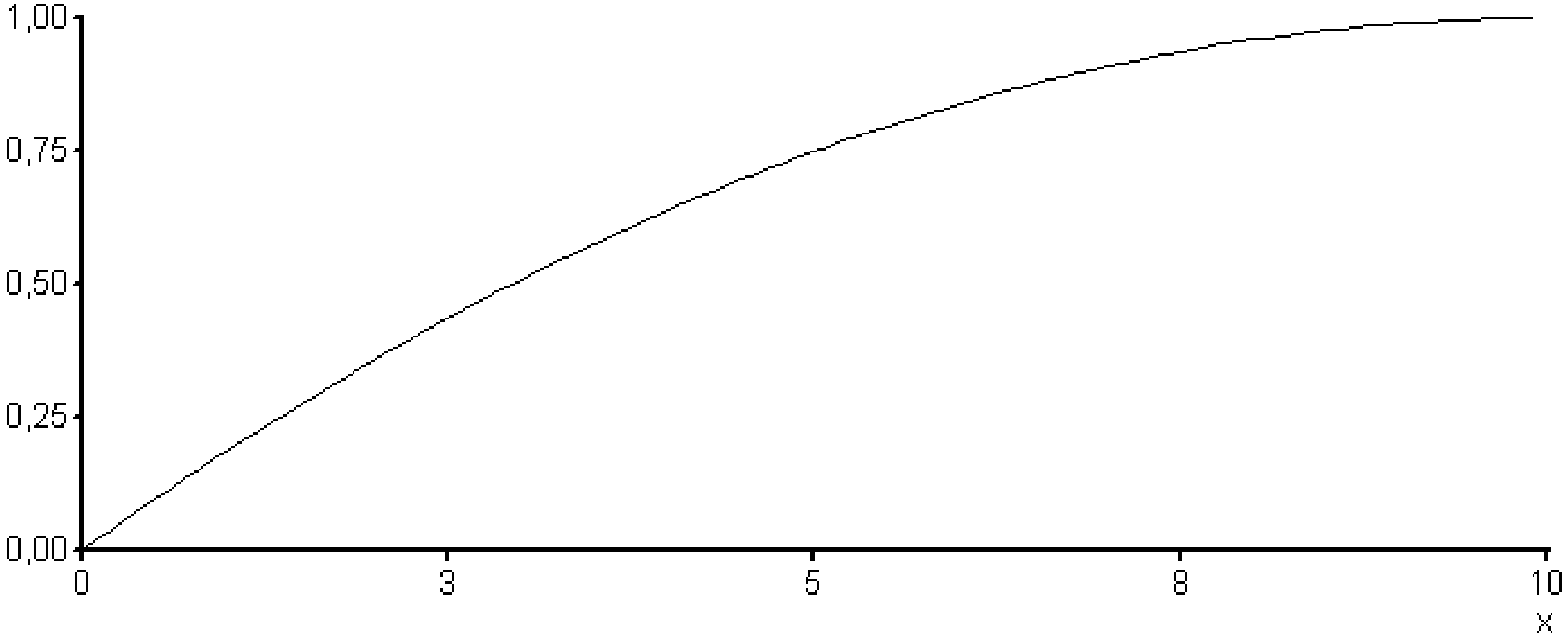
Si $x \geq 10$

$$F_X(x) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{10} (0.2 - 0.02t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1$$

Función de Distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{10} - \dfrac{x^2}{10^2} & 0 < x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$



Propiedades de la función de distribución acumulada:

1. $\forall\, x \in \Re,\ F_X(x) \in [0,1]$.

2. $F_X(x)$ es monótona no decreciente, es decir, si $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

4. $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

5. $\dfrac{dF_X(x)}{dx} = f(x)$.

Esperanza de una variable aleatoria continua

Def.:

Sea **X** una v.a. continua, con f.d.p. f(x), la ***esperanza o valor esperado o promedio*** de **X** se define como:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Varianza de una variable aleatoria continua

Def.:

Sea **X** una v.a. continua con función de densidad de probabilidad f(x) y esperanza μ_X, la ***varianza*** de **X,** que se denota **V(X) ó** σ_X^2 , se define como

$$\mathbf{V(X)=\sigma_X^2 = E\left[\,(X-E(X))^{\,2}\,\right] = E(X^2)-(E(X))^{\,2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx\right]^2$$

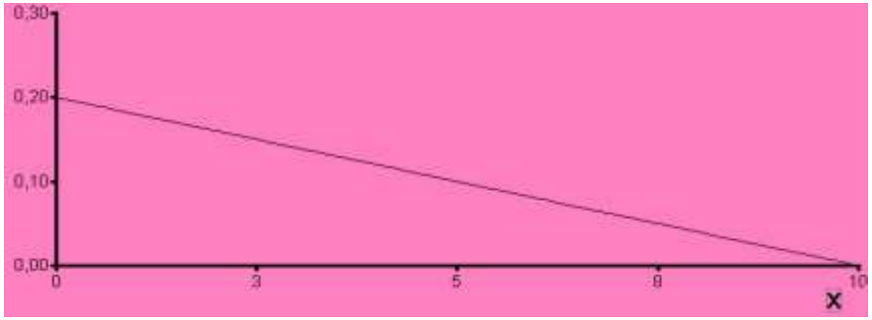
La ***raíz cuadrada positiva de la varianza***, σ_X**,** se denomina ***desvío estándar*** y es también una medida de dispersión, con la ventaja sobre la varianza que tiene las **mismas unidades** que la correspondiente **v.a**.

Según la v.a. de interés,

X =“*tiempo, en minutos, que se necesita para reiniciar un determinado sistema*”

cuya función de densidad era:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Su **valor** ***esperado*** o ***promedio*** es,

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \;\; f(x) \;\; dx$$

El **tiempo promedio** que se necesita para **reiniciar** un determinado **sistema**, es de.

Según la **v.a.** de interés**,**

X =“*tiempo, en minutos, que se necesita para reiniciar un determinado sistema*”

cuya **función de densidad** es:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 - \dfrac{x}{50} & 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Su **varianza** es**,** **V(X) = E(X²) – [E(X)]²**

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x) \; dx = \int_0^{10} x^2 \, (0.2 - 0.02x) \, dx =$$

$$\mathbf{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \qquad - (\qquad)^2 =}$$

La **fluctuación promedio** del tiempo que tarda en reiniciarse un determinado sistema respecto del tiempo medio es de

Su *desvío estándar* es,

Propiedades

Propiedades de E(X)

a) $E(a) = a$

b) $E(a.\, X) = a.\, E(X)$

c) $E(X + a) = E(X) + a$

d) $E(H(x)) = \int_{\Re} H(x) f(x) dx$

Propiedades de Var(X)

a) $V(a) = 0$

b) $Var(a\,.X) = a^2\, Var(X)$

c) $Var(X + a) = Var(X)$

Distribuciones de v.a. continuas

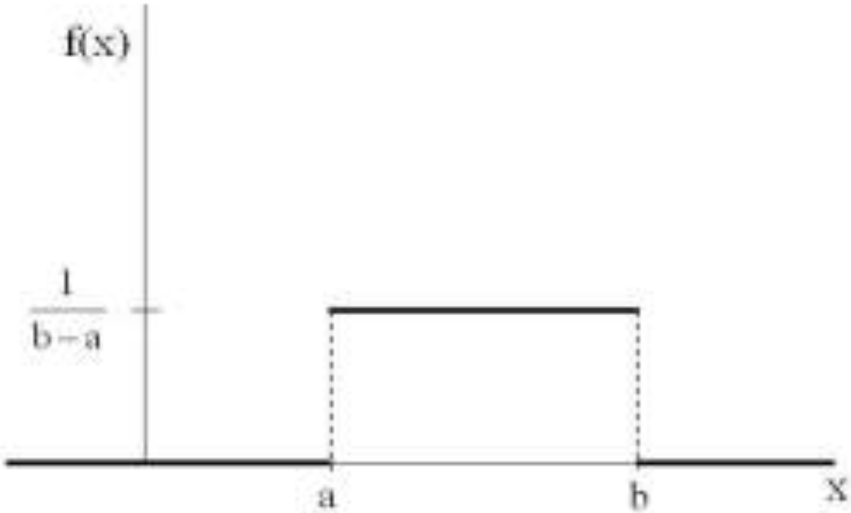
- **Distribuciones Uniforme**
- ***Distribución exponencial***
- ***Distribución Normal***

Distribuciones de v.a. continuas

Variable aleatoria uniforme

La variable aleatoria **X** está *distribuida uniformemente* en el intervalo **[a,b],** con **a** y **b** finitos y se denota **X** ~ U[*a*,*b*], si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{b-a}} & \textbf{si} \quad \mathbf{a \le x \le b} \\ \mathbf{0} & \textbf{en el resto} \end{cases}$$



Esperanza y varianza de una v.a. X ~ U[a,b]

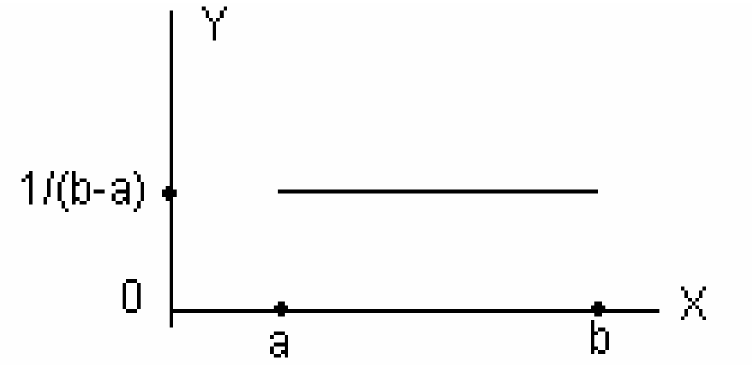
$$\mathrm{E(X)} = \mu_{\mathrm{X}} = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{\mathbf{a+b}}{2} \qquad \mathrm{V(X)} = \sigma^2{}_{\mathrm{X}} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\mathbf{(b-a)^2}}{\mathbf{12}}$$

Distribuciones de v.a. continuas

Variable aleatoria uniforme

La variable aleatoria **X** está *distribuida uniformemente* en el intervalo **[a,b],** con **a** y **b** finitos y se denota **X** ~ U[*a*,*b*], si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{b-a}} & \textbf{si} \quad \mathbf{a \le x \le b} \\ \mathbf{0} & \textbf{en el resto} \end{cases}$$



Esperanza y varianza de una v.a. X ~ U[a,b]

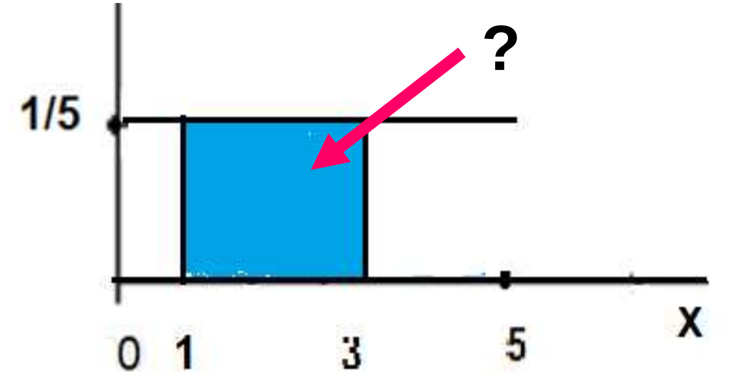
$$E(X) = \mu_X = \frac{\mathbf{a+b}}{2} \qquad V(X) = \sigma^2{}_X = \frac{(\mathbf{b-a})^2}{\mathbf{12}}$$

Ejemplo:

Una persona toma un colectivo para ir al trabajo, que pasa exactamente cada 5 minutos. Si sale de su casa sin tener en cuenta la hora, el tiempo X, que tiene que esperar en la parada es una v.a. Uniforme que puede tomar cualquier valor en el intervalo [0, 5], cuya función de densidad esta dada por:

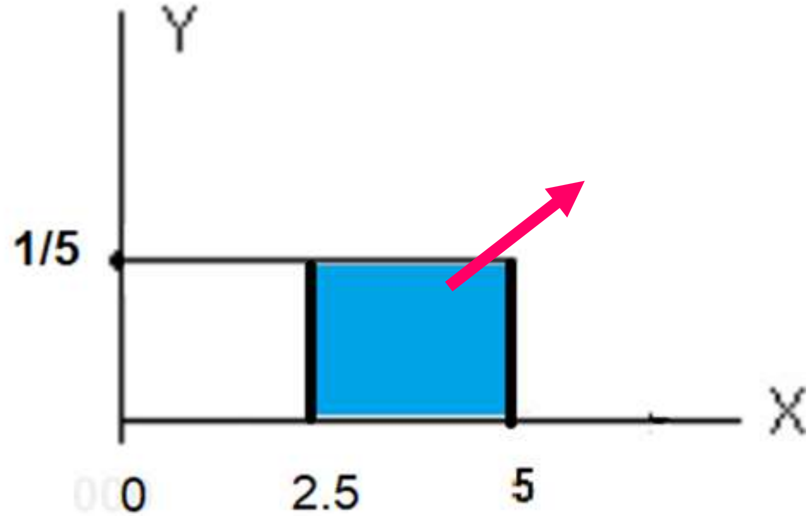
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & \text{si} \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar entre 1 y 3 minutos ?



b) **¿Cuál es la probabilidad de que la espera de la persona supere el tiempo promedio ?**

E(X) =

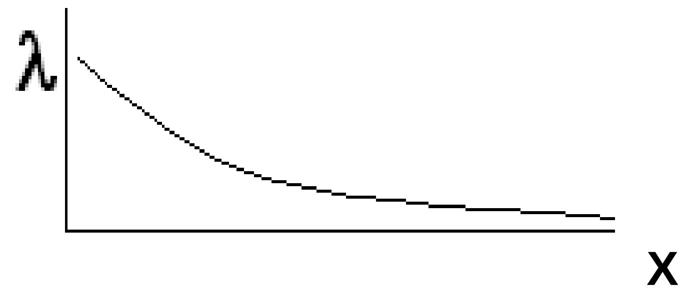


$\mathbf{P(X} > \quad \mathbf{)} =$

Variable aleatoria exponencial

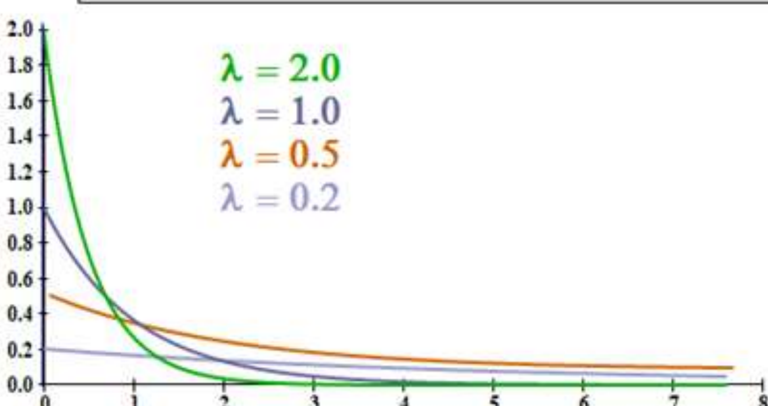
La v.a. **X** se dice que tiene una *distribución exponencial* de parámetro λ y se denota **X ~ Exp(λ)**, si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \quad \lambda > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Distribución Exponencial

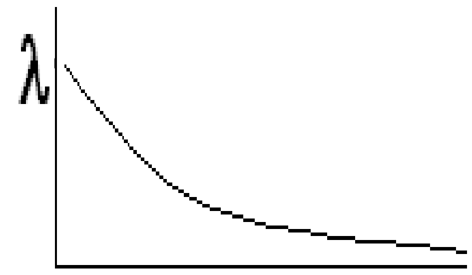
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para } x > 0, \; \lambda > 0$$



Esperanza y varianza de una v.a. Exp. (λ)

$$E(X) = \mu_X = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \sigma^2_X = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución exponencial



Suele utilizarse para medir la ***cantidad de tiempo que transcurre hasta que se produce algún evento específico***

Ejemplos

X= "*Duración, en minutos, de una llamada telefónica comercial de larga distancia*".

B =" *Cantidad de tiempo, en meses, que dura la batería de un automóvil*".

E = "*Tiempo, en minutos, que trascurre entre dos llegadas consecutivas de dos clientes a un banco*"

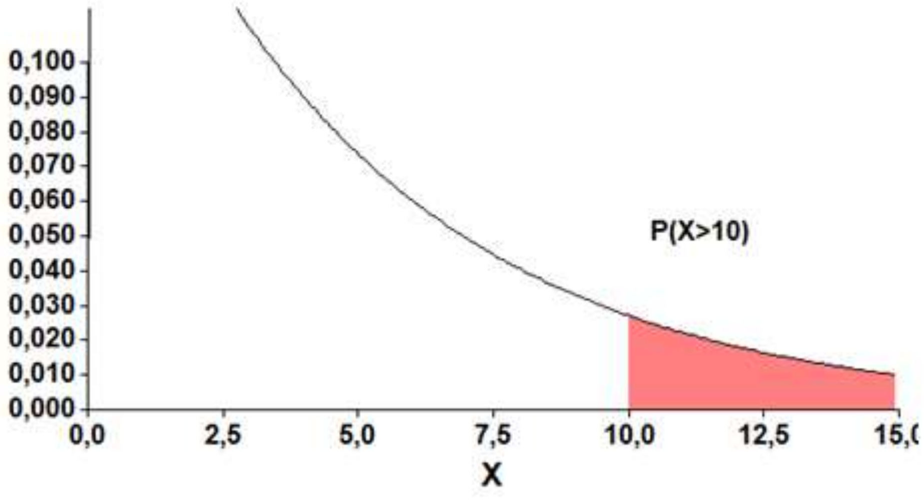
T = "*Tiempo que transcurre hasta que se produzca un terremoto* ".

D = "*Cantidad de dinero que un cliente gasta en una visita al supermercado* "

Ejemplo:

Supongamos que el tiempo de respuesta de una terminal conectada en línea es una v.a. X con distribución exponencial con esperanza igual a 5 segundos.

¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea mayor de 10 segundos?



Distribución Normal o Gaussiana

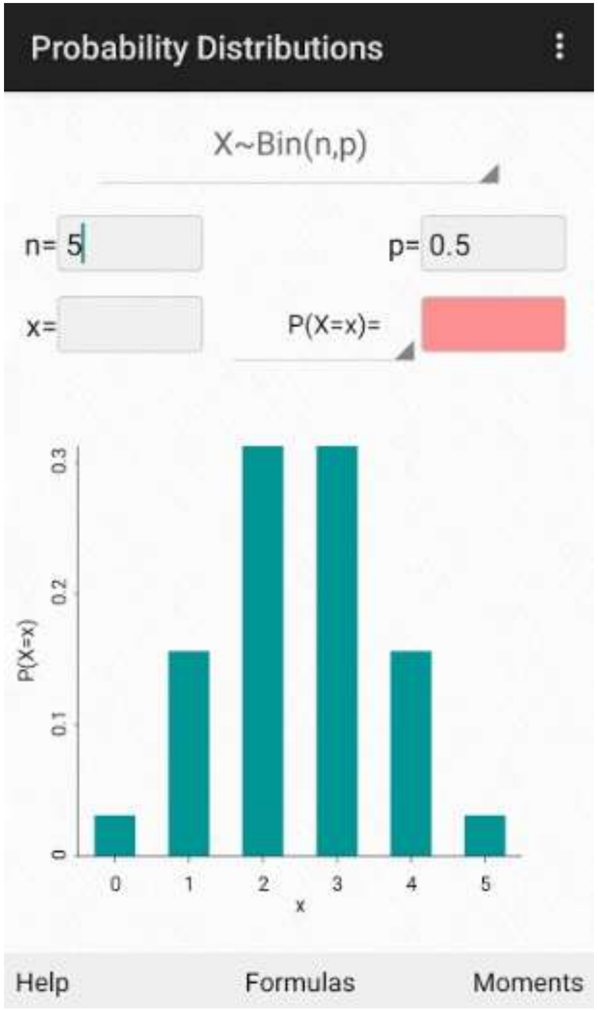
Sin duda la distribución continua de probabilidad más importante, por sus innumerables aplicaciones prácticas y teóricas, es la distribución normal, o gaussiana o de Laplace - Gauss. Fue descubierta y publicada por primera vez en 1733 por De Moivre. A la misma llegaron, de forma independiente, Laplace (1812) y Gauss (1809), en relación a la teoría de los errores de observación astronómica y física .

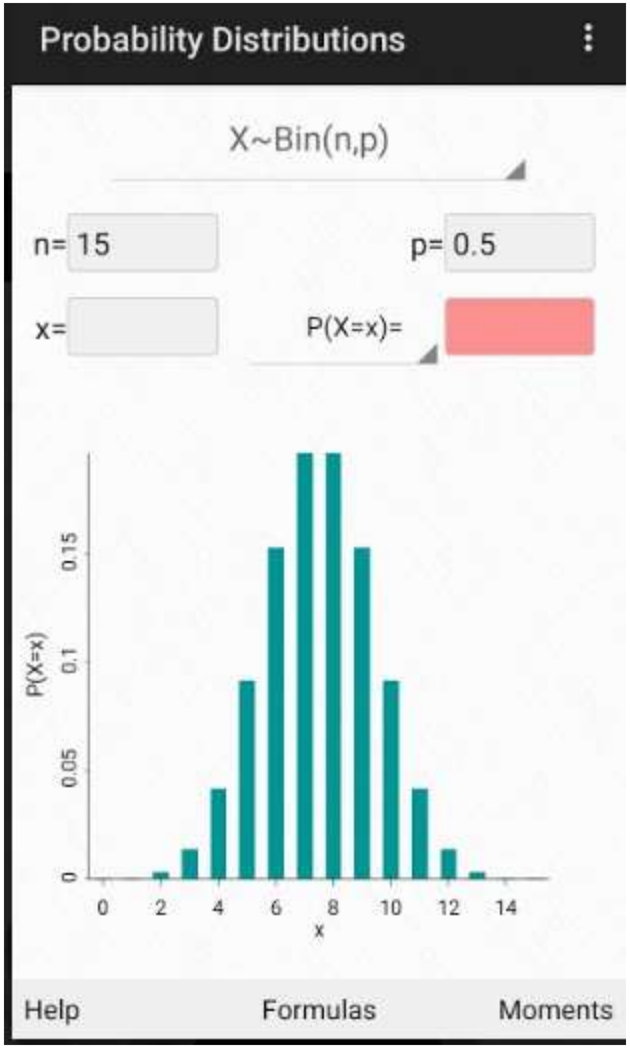
X =«N° de caras obtenidas en **n** tiradas de una moneda»

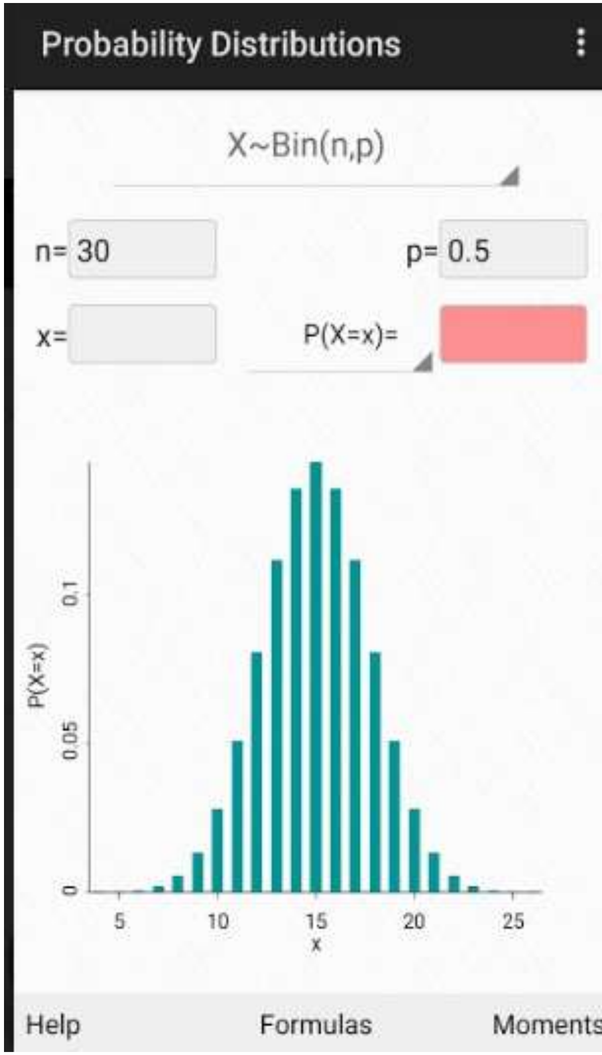
X~ B(**n**, p = 0.5)

Si **n** es grande?

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad \text{con } x = 0,1,2,\ldots,n$$







Distribución de los errores

Distribución de los errores. Dos distribuciones propuestas por Thomas Simpson's (1756)

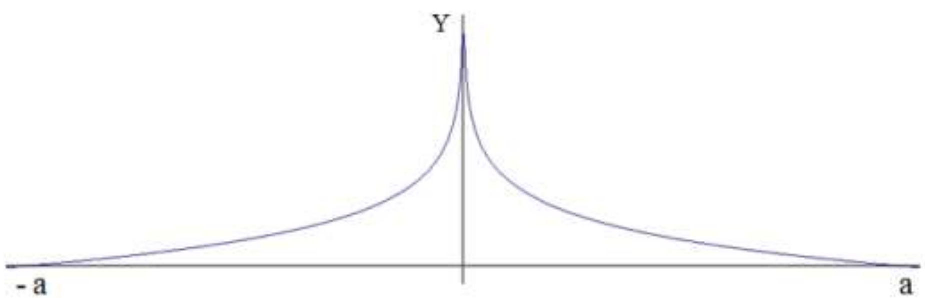
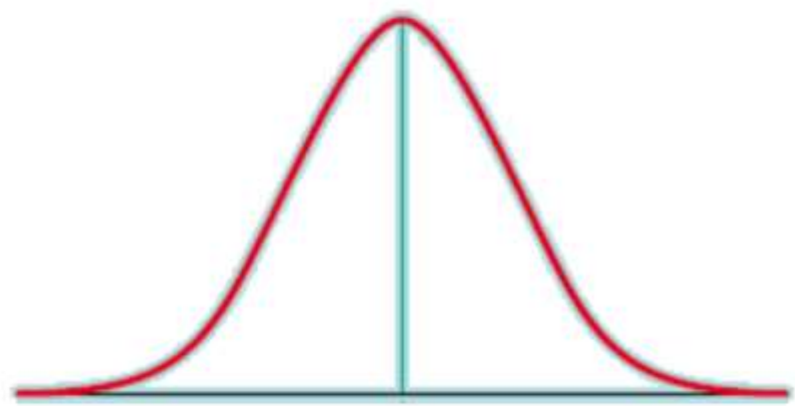


Figura Segunda curva de error. Laplace

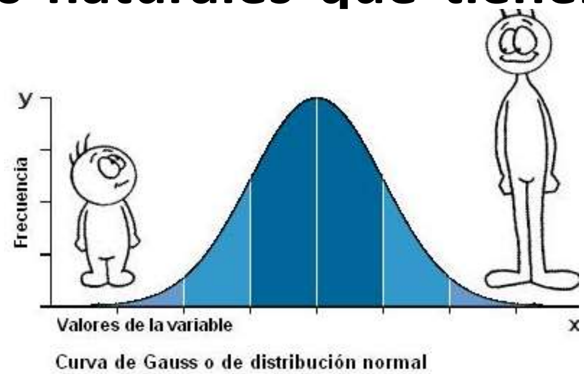
(1777)



Gauss (1809)

Distribución Normal o Gaussiana

Hay varias variables asociadas a fenómenos naturales que tienen *distribución Normal*:



Caracteres Morfológicos:
tallas, pesos, diámetros de personas, animales y plantas.

Caracteres fisiológicos: Efecto de una dosis de un fármaco, o de un fertilizante, etc.

Caracteres sociológicos: consumo de cierto producto por un grupo de individuos, puntuación de un examen.

Caracteres psicológicos: coeficiente intelectual.

Errores de medición de una magnitud. Nivel de ruido en telecomunicaciones.

Datos meteorológicos: temperatura, precipitación pluvial, etc.

El aporte de Gauss se honraba en los billetes de los marcos alemanes (antes de los Euros) como uno de sus descubrimientos más trascendentales.

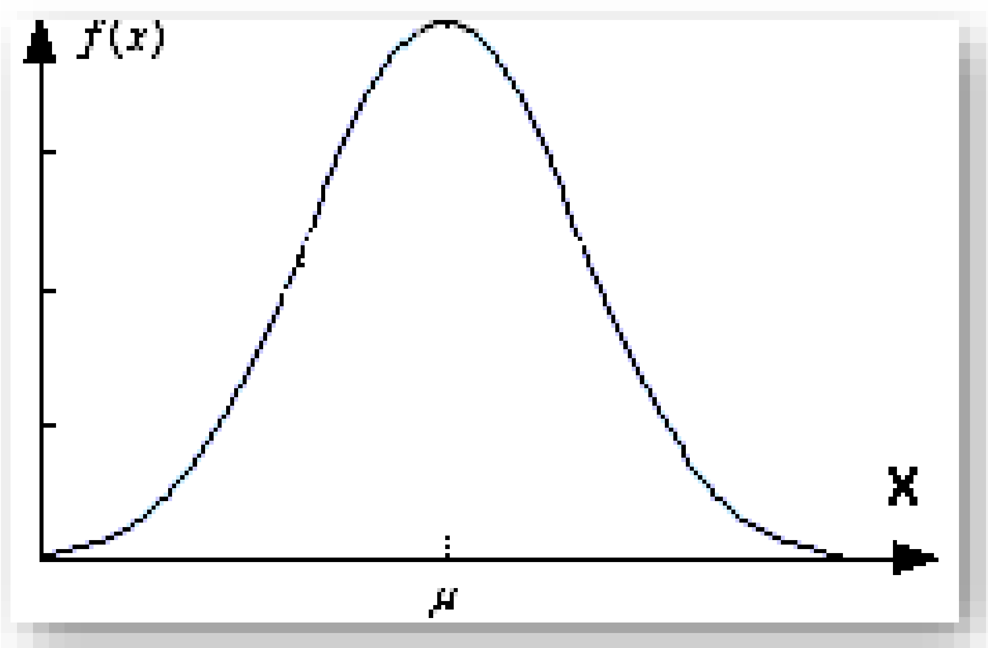
Distribución Normal o Gaussiana

Variable aleatoria normal

Una v.a. **X** se dice que tiene una ***distribución normal*** de parámetros μ y σ^2, y se denota **X** ~ N(μ, σ^2) si su función de densidad está dada por:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{e^{-(1/2)\,[(x-\mu)/\sigma]^{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}, \; -\infty < x < \infty, \; -\infty < \mu < \infty, \; \sigma > 0$$

$1/\sqrt{2\pi}\,\sigma$



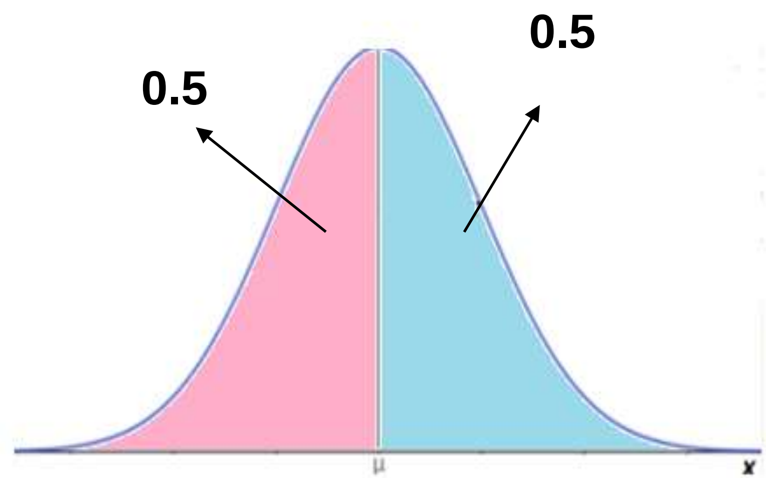
Distribución Normal o Gaussiana

Variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

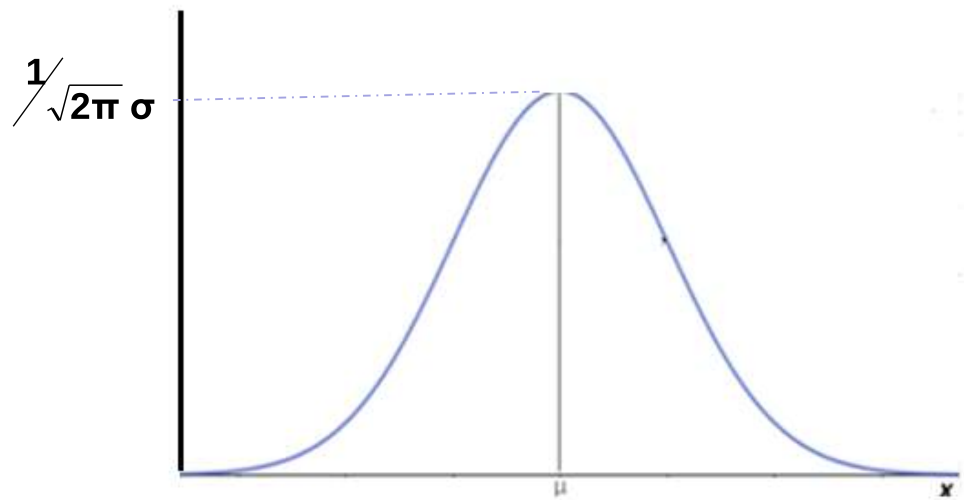
$$f(x) = \frac{e^{-(1/2)\,[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

Características de la función de densidad:

- Es una curva con **forma de campana**, que se extiende sin límite tanto en la dirección negativa como positiva de la recta real.



- **Simétrica** respecto del valor de μ. (media). El eje de simetría está dado por la recta de ecuación $x = \mu$. El 50 % de los datos son mayores a la media y el otro 50% menores a su valor. El área a izquierda de es 0.5 y a derecha también.



- El valor máximo de la función de densidad es $1/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ y se alcanza en $x = \mu$.

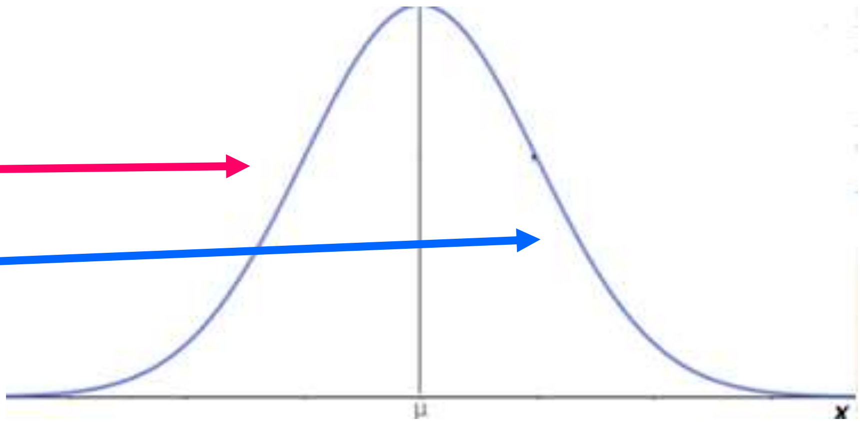
Distribución Normal o Gaussiana

Variable aleatoria normal $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$

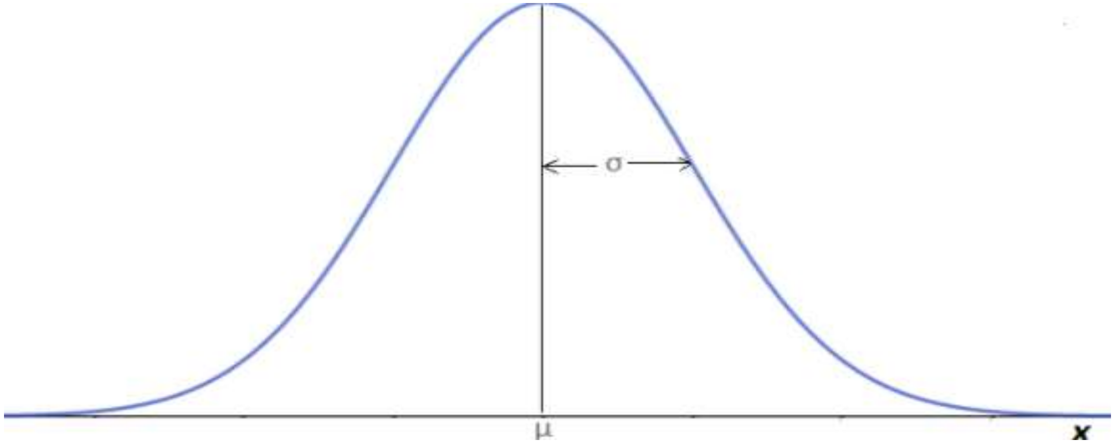
Características de la función de densidad:

- Es creciente si $\mathbf{x} \in (-\infty, \mu)$, y

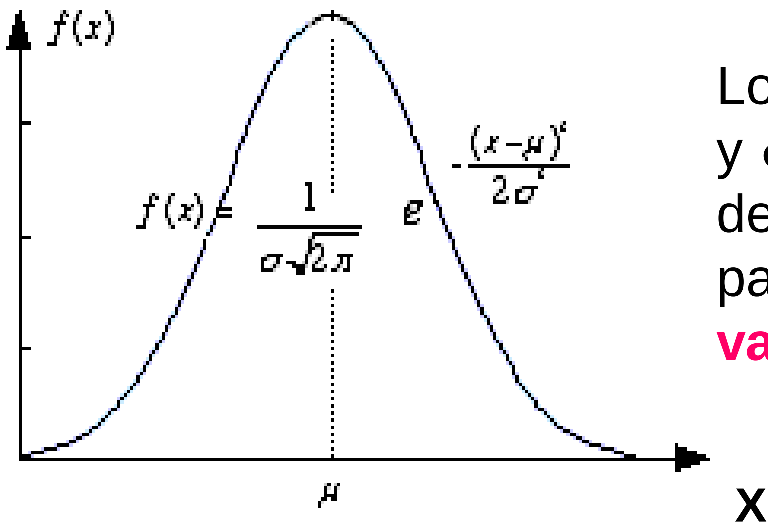
decreciente si $\mathbf{x} \in (\mu, +\infty)$.



- Los puntos de inflexión de la curva se encuentran en $\mathbf{x = \mu + \sigma}$ **y** $\mathbf{x = \mu - \sigma}$.



Distribución Normal o Gaussiana



Los parámetros de la distribución normal **μ** y **σ²** determinan completamente la función de densidad de probabilidad. Estos parámetros representan la **media** y la **varianza** de la v.a. **X**, respectivamente.

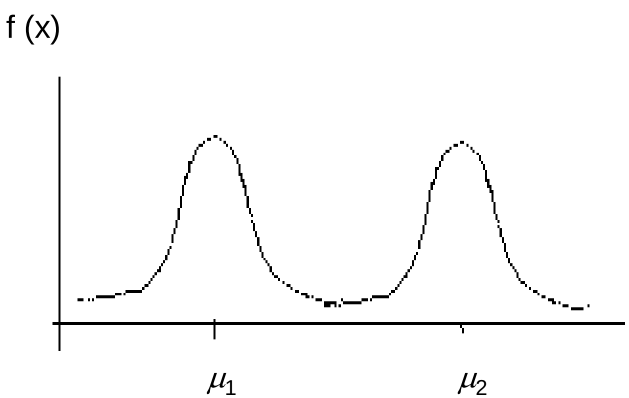


Figura 1

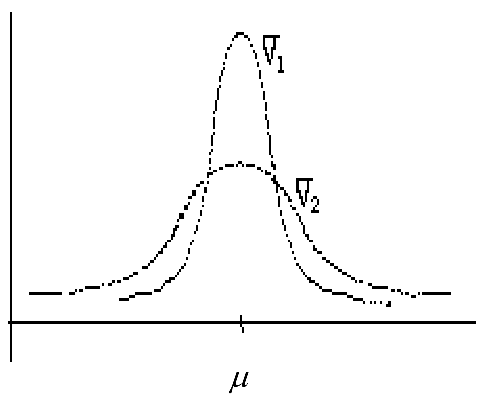


Figura 2,

En la **Figura 1** las curvas de densidad tienen el mismo desvío estándar **σ** pero distinta media **μ**, las curvas tienen idéntica forma pero están centradas en diferentes puntos.

En la **Figura 2**, las curvas tienen la misma media **μ** y distinto desvío estándar lo cual determina que estén centradas en el mismo punto y una sea más aplastada que la otra.

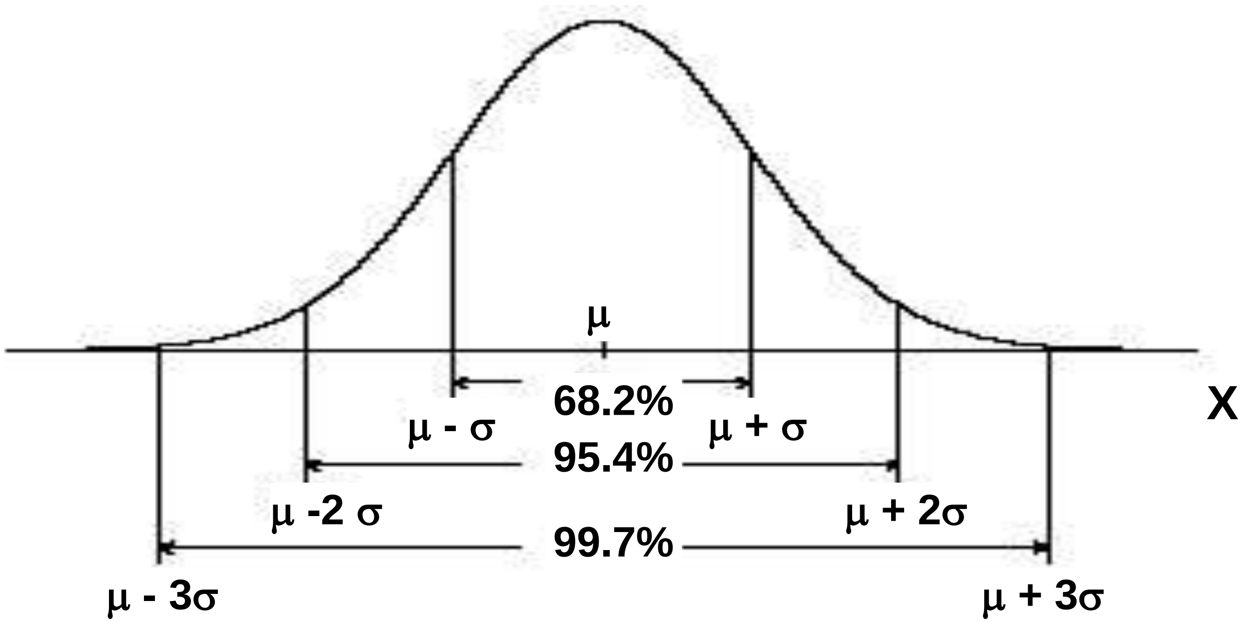
Distribución Normal o Gaussiana

Los valores de la variable **X** se agrupan con mayor probabilidad alrededor del valor μ y con menor probabilidad se alejan de este valor.

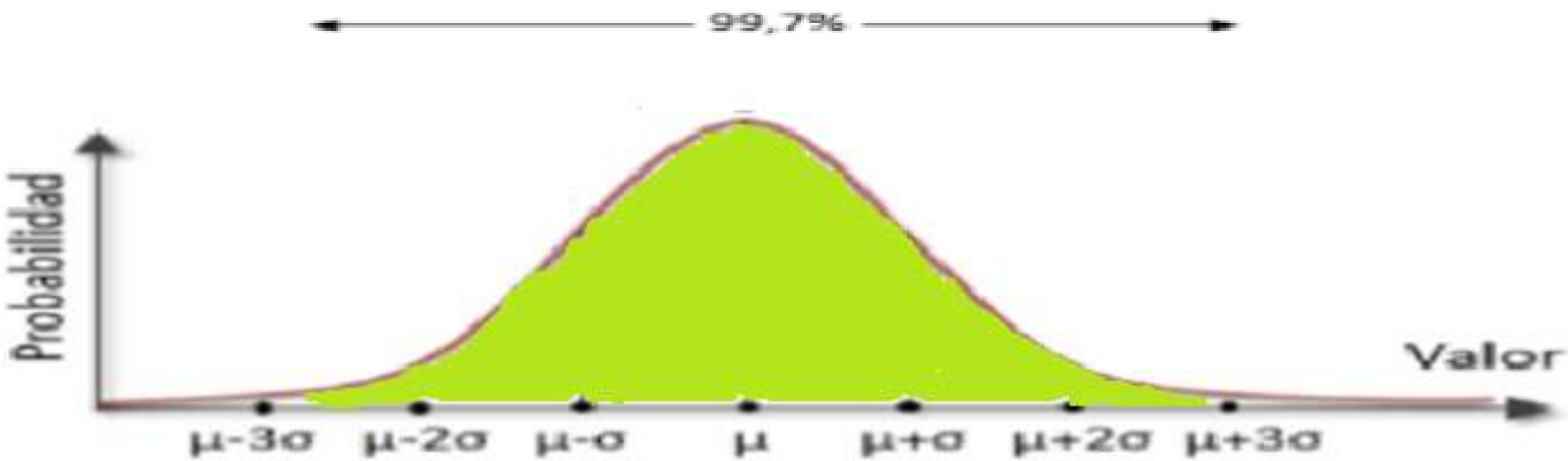
El **68.2%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm \sigma$.

El **95.4%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 2\sigma$.

El **99.7%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 3\sigma$.



Distribución Normal o Gaussiana



$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.682$

El **68.2%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm \sigma$.

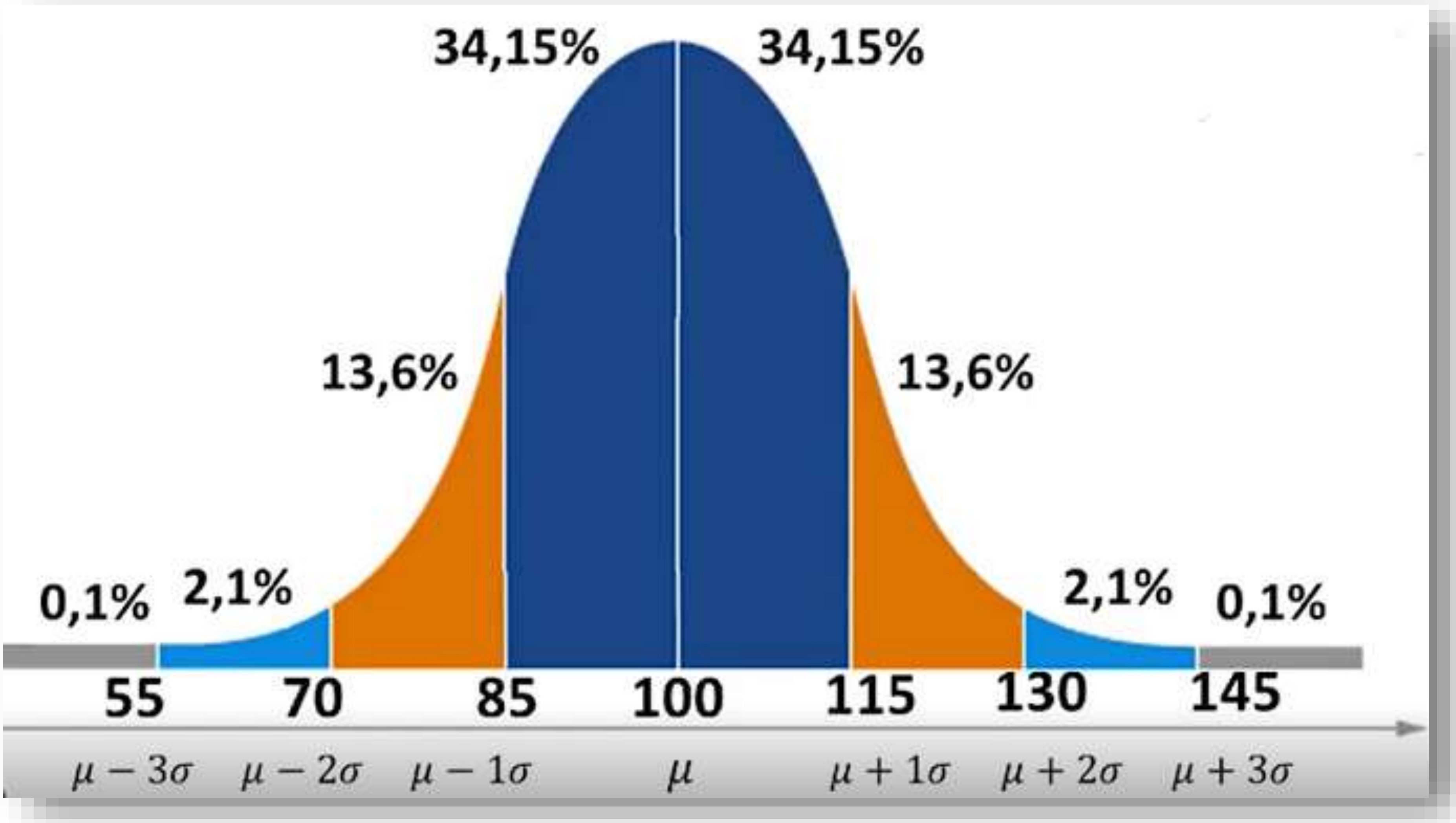
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.954$

El **95.4%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 2\sigma$.

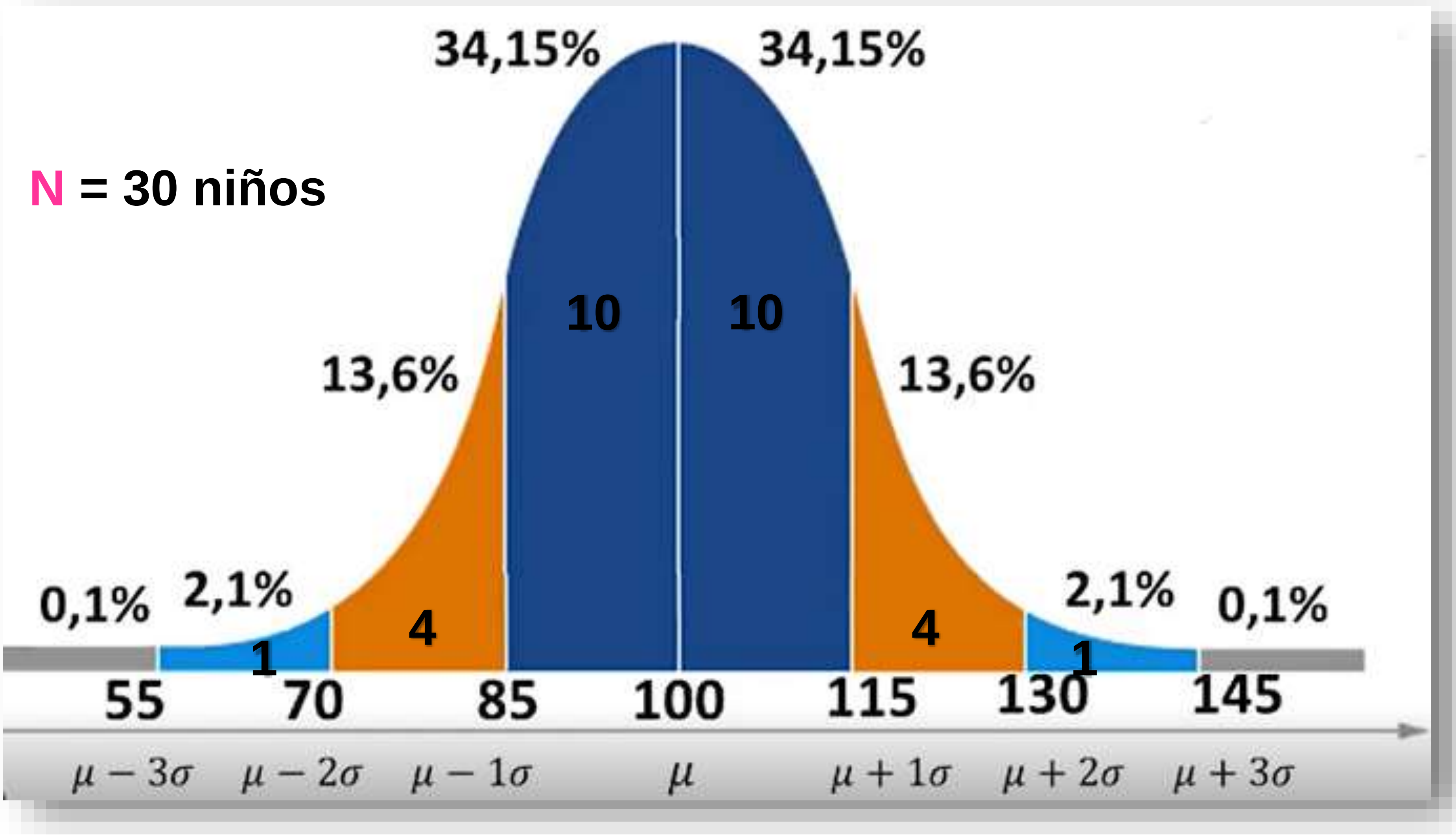
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.997$

El **99.7%** de las observaciones están comprendidas entre los límites $\mu \pm 3\sigma$.

Distribución del CI de un individuo



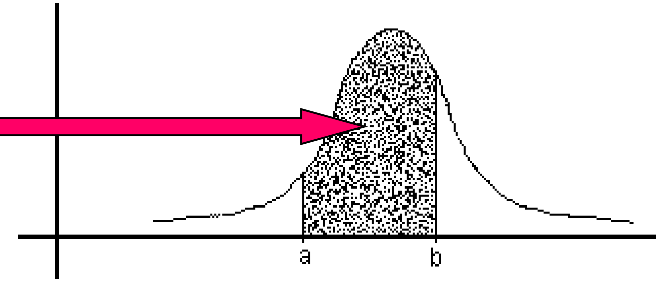
Distribución del CI de un individuo



Distribución Normal o Gaussiana

P(a ≤ X ≤ b) = el área acotada por la función de densidad y las rectas X = a y X = b,

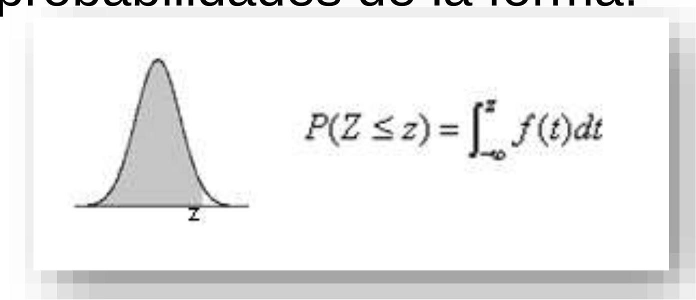
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\,dx$$



Def.:
Una v.a. normal con parámetros **μ = 0** y **σ^2 = 1**, recibe el nombre de v.a. Normal Estándar y se denota con la letra Z**.** Se denota **Z ~ N(μ = 0, σ^2 = 1)**

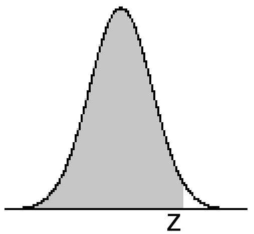
Los valores de probabilidad de la v.a. **Z** están **tabulados**. Hace tiempo se utilizaba una **tabla** que proporcionaba las probabilidades de la forma:

P(Z ≤ z)



Las probabilidades que **no tienen la forma P(Z ≤ z)** se obtenían con el empleo de las **reglas básicas de probabilidad** y de la **simetría** de la distribución normal.

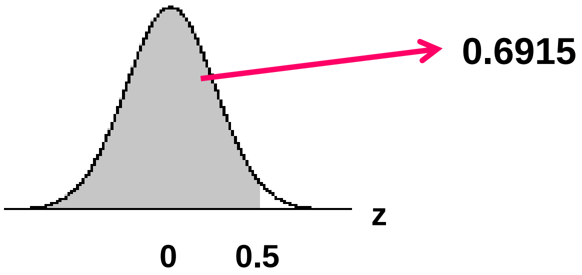
Distribución Normal Estándar



$$P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,dt$$

	Segunda cifra decimal del valor de z									
z	**0.00**	**.01**	**.02**	**.03**	**.04**	**.05**	**.06**	**.07**	**.08**	**.09**
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621

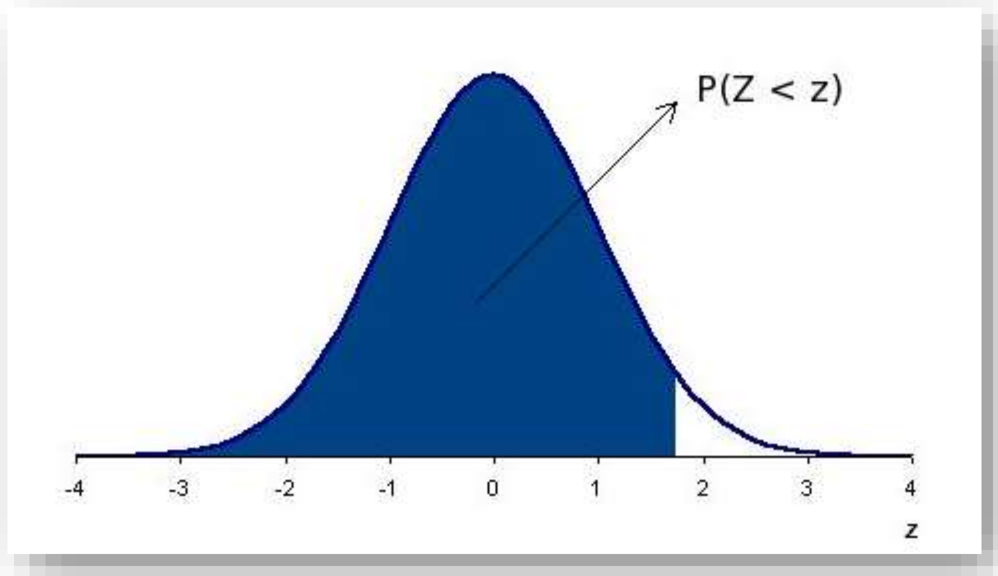
P(Z < 0.5) = 0.6915



Ejemplos

1. Sea *Z* una v.a. con distribución Normal Estándar, es decir, Z~N (0; 1). Calcular las probabilidades, dibujando el área correspondiente, siempre que sea posible.

a) $P(Z \leq 1.5)$
b) $P(0 \leq Z \leq 1.5)$
c) $P(-2.3 \leq Z \leq 1.2)$
d) $P(Z \geq 1)$
e) $P(Z \leq -1.2$ ó $Z \geq 2.5)$
f) $P(Z < -4)$
g) $P(|Z| \leq 1.5)$
h) $P(-1.65 \leq Z / Z \leq 1.5)$
i) $P(Z = 1.5)$
j) $P(Z \leq 5)$



2. Sea Z ~ N (0; 1), determinar el valor de la constante c tal que:

a) $P(Z \leq c) = 0.9$

b) $P(X < c) = 0.35$

c) $P(|Z| \leq c) = 0.668$

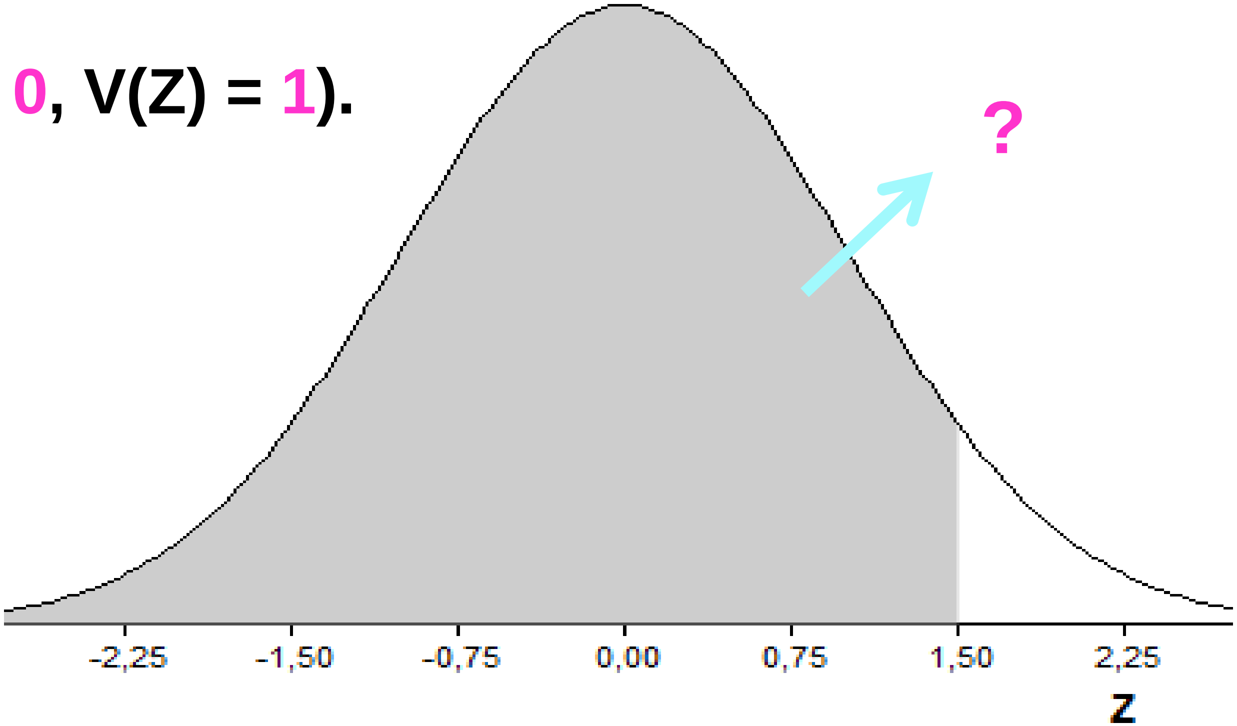
d) $P(|Z| \geq c) = 0.14$

e) $P(Z \geq c) = 0.45$.

Uso de la App

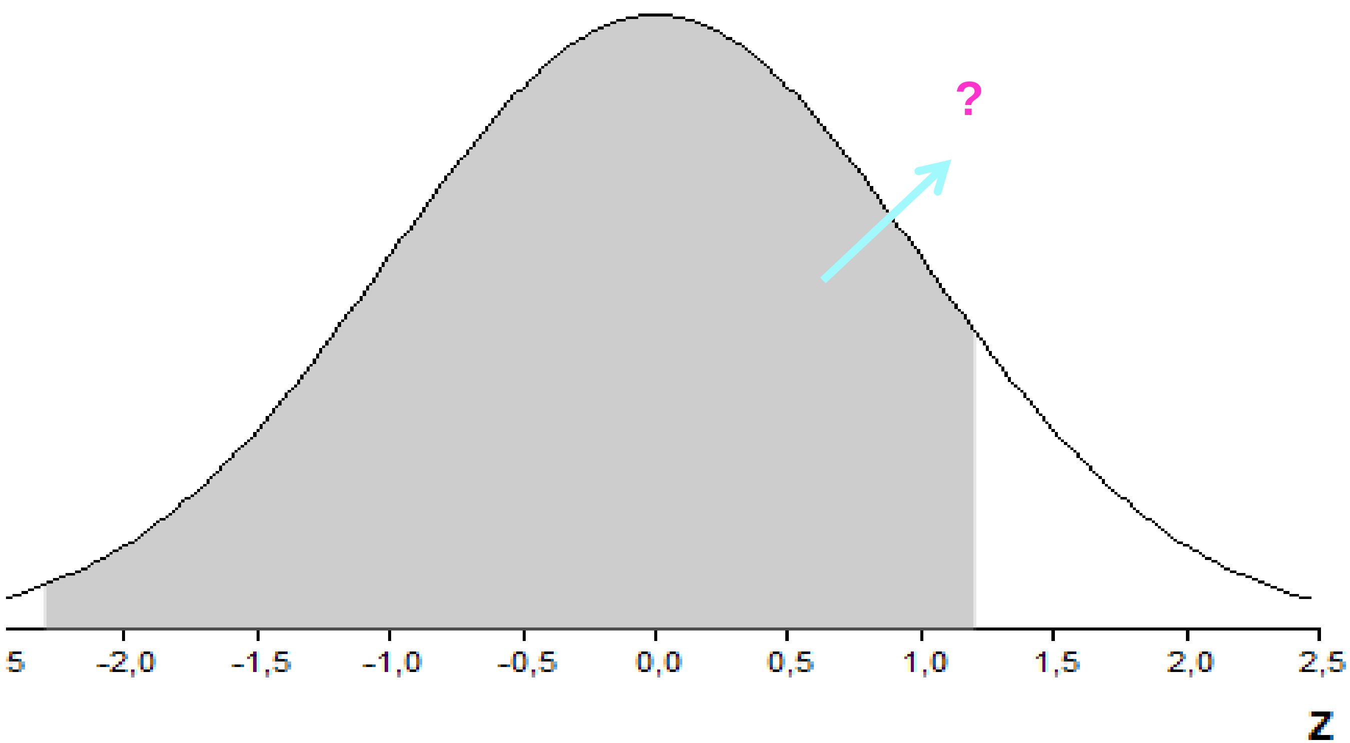
Sea $Z \sim N(E(Z) = 0, V(Z) = 1)$.

a) $P(Z \leq 1.5) =$

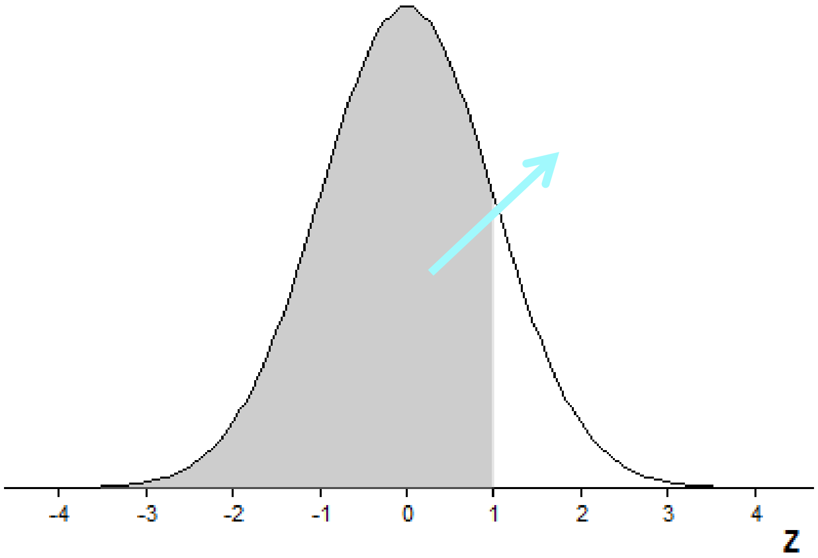


Sea Z ~ N (E(Z) = 0, V(Z) = 1).

c) $P(-2.3 \leq Z \leq 1.2) =$



Sea Z ~ N (E(Z) = 0, V(Z) = 1).

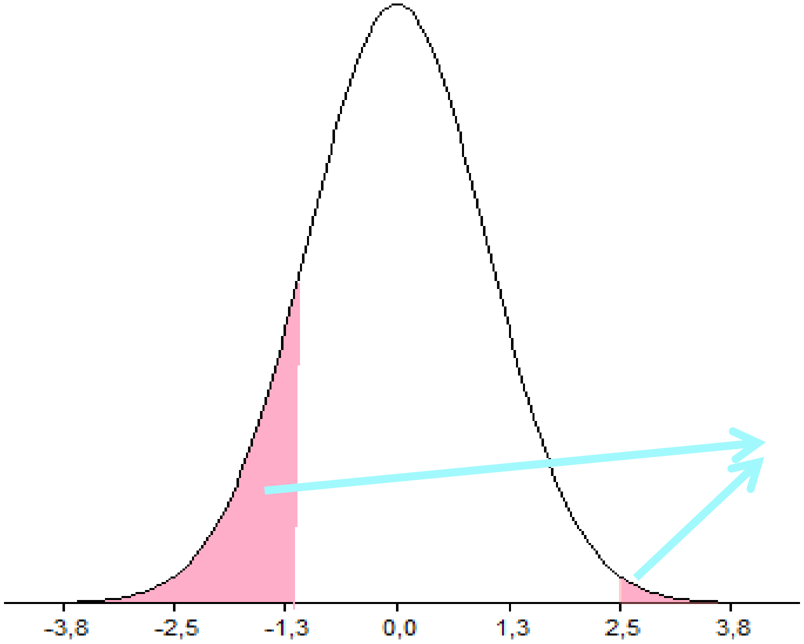


d) P(Z ≥ 1)

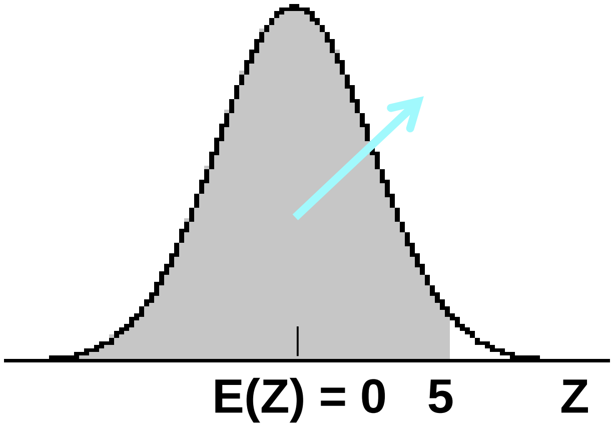
Otra forma:

P(Z ≥ 1)

e) P(Z ≤ -1.2 ó Z ≥ 2.5) =



Sea Z ~ N (E(Z) = 0, V(Z) = 1).



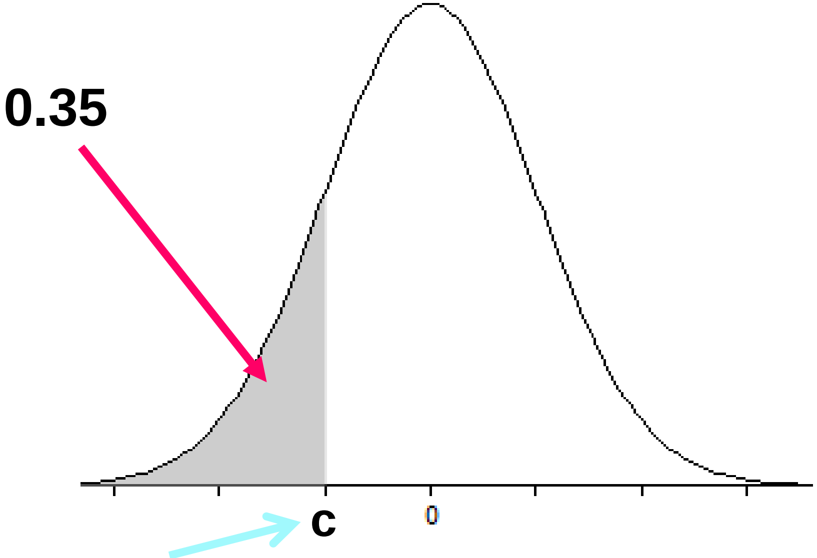
i) P(Z = 1.5)

j) P(Z ≤ 5)

II) Sea Z ~ N (0; 1), determinar el valor de la constante c tal que

b) P(Z< c) = 0.35

c =



d) $P(|Z| \geq c) = 0.14$

$$0.14 = P(|Z| \geq c) = P(Z \leq -c \cup Z \geq c) =$$

Por lo tanto

¿Qué ocurre si X NO es una v.a., normal estándar?

Dada la v.a. **X**, v.a. normal con media μ y varianza σ^2**, no estándar, antes** se la **transformaba** en **v.a. estándar,** mediante el empleo de la siguiente expresión:

Si X ~ N(μ, σ^2), entonces la v.a. $\mathbf{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$ tiene un distribución **N(0,1).**

Esta **transformación** se conoce como ***estandarización*** **de la v. a. X.**

Su interpretación:

El valor de Z representa cantidad de desvíos estándar a la que dista la v.a. X de su media.

Mediante la ***estandarización*** se calculaba la **probabilidad** de que **X** sea **menor o igual** a **x**:

$$\mathbf{P(X \leq x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq z)}$$

Hoy en día NO se **requiere** utilizar esta **transformación** para determinar las probabilidades de una v.a. **X**, v.a. normal con media μ y varianza σ^2**, no estándar.**

Ejemplo 1

Una imagen escaneada transformada a formato pdf ocupa en promedio 0.6 megabytes de memoria con una desviación estándar de 0.4 megabytes. Si se supone que el tamaño de una imagen escaneada y transformada a pdf se distribuye normalmente, determinar:

a) Si se planea publicar una imagen escaneada y transformada en formato pdf en un sitio web, ¿cuál es la probabilidad que su tamaño esté entre 0.37 megabytes y 0.50 megabytes?

b) De las imágenes escaneadas y transformada en formato pdf cuyo tamaño supera el promedio, ¿qué porcentaje tienen un tamaño de a lo sumo 0.75 megabytes?

c) ¿Cuál es el tamaño máximo que ocupan el 30% de las imágenes escaneadas y transformadas en formato pdf más pequeñas ?

d) Si se planea publicar 10 imágenes escaneadas y transformadas en formato pdf elegidas al azar en un sitio web, ¿Cuál es la probabilidad que sólo dos de ellas tengan un tamaño de por lo menos 0.6 megabytes?

Ejemplo 2

Una empresa está implementando un programa de entrenamiento diseñado para mejorar la calidad de las habilidades de supervisión de los supervisores de línea de producción. Debido a que el programa es autoadministrativo, los supervisores requieren un número diferente de horas para terminarlo. Experiencias anteriores indican que el tiempo medio que le lleva a un participante completar el programa es de 500 horas, y que esta v.a. normalmente distribuida con una desviación estándar de 100 horas.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un participante elegido al azar requiera más de 500 horas para completar el programa?

2. ¿Qué porcentaje de participantes requirieron entre 500 y 650 horas para completar el programa de entrenamiento?

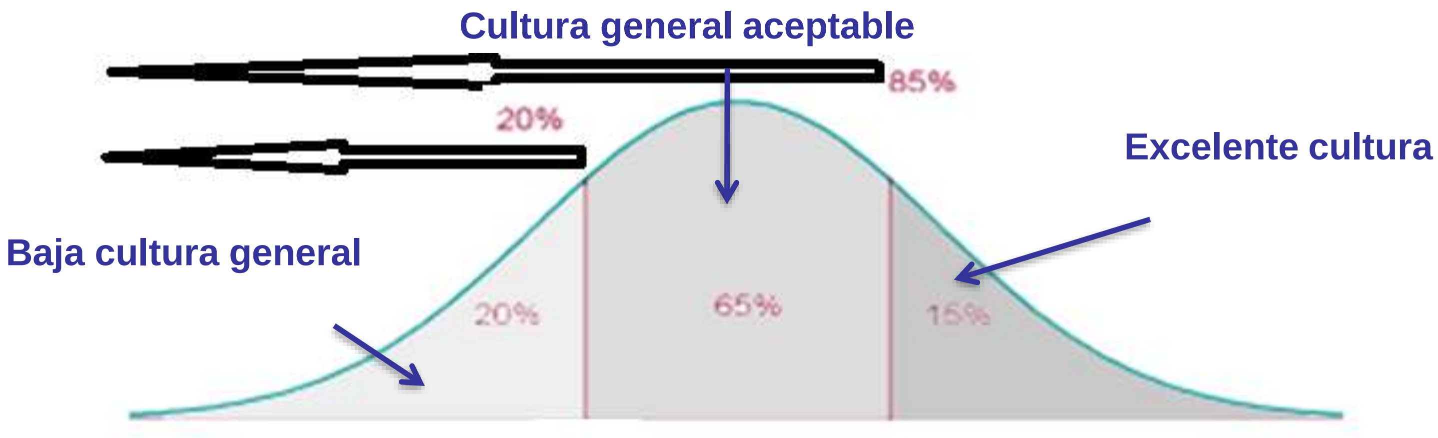
3. De los participantes requirieron por lo menos 510 hs. ¿qué porcentaje necesitaron a lo sumo 700 hs para completar el programa de entrenamiento?

4. ¿Cuál es el tiempo mínimo que requiere el 30% de los participantes que más tiempo necesitaron para completar el programa de entrenamiento?

5. Si se eligen al azar 10 participantes del programa de entrenamiento, ¿Cuál es la probabilidad que sólo dos de ellos requieran por lo menos 510 hs. para completar el programa?

Ejercicios

1. Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución Normal con una media de 65 pts y un desvío de 18 pts. Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de *baja cultura general*, de *cultura general aceptable*, de *excelente cultura general*) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?



Silvina Pistonesi

2. La duración de cierto dispositivo electrónico utilizado en un equipo de rayos láser se distribuye normal con media 100hs y desviación estándar de 50hs.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo sobrepase las 120 hs al ser instalado?

b) Se considera que un dispositivo es confiable si dura más de 110 hs. Si se escogen 5 dispositivos ¿cuál es la probabilidad de que todos resulten confiables?

c) ¿Cuál es la duración mínima del 70 % de los dispositivos que más duración poseen?

d) Si se eligen 1000 de estos dispositivos, ¿cuántos se espera que resulten confiables?

3. Una característica de calidad de un proceso de manufactura que se mide está distribuida normalmente con media 40 y desviación estándar de 13 y los límites de especificación son 41 ± 5. Suponiendo que se puede rehacer un articulo que excede el límite superior de especificación y que se debe rechazar tal artículo si está por debajo del límite inferior de especificación, ¿que porcentaje de artículos hay para rehacer y qué porcentaje de rechazados origina el proceso?

Principales distribuciones continuas

Distribución	Función de probabilidad	Media	Varianza
Uniforme (a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal (μ,σ^2)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad -\infty<x<\infty$	μ	σ^2
Exponencial (λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$