EXAMEN FINAL DE ELEM. DE ÁLG. Y GEOM (10/08/2022) FERRARO.

1) a) Sea R la relación binaria definida en Z mediante xRy $\Leftrightarrow$ x*y> 0. Analizar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva. ¿Es una relación de equivalencia? ¿Es de orden?

b) Sea R la relación de equivalencia en Z asociada a la función $f(x) = x^2 + 2x + 10$ escribir las clases de equivalencia y el conjunto de cociente.

2) a) Sean a, b, p $\in$ Z. Demostrar que, si p es un número primo, $p^2 | b \ y \ p | a^3 - b^2$ entonces p|a.
b) Mostrar que, si p no es primo, la afirmación del inciso anterior no es cierta en general.

3) Sea el sistema <O,XYZ> asociado a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y el sistema <O,X'Y'Z'> asociado a la base

B = {(3,2,1), (0,0,1), (1,0,1)}

El plano $\pi\colon -x + 3y + z - 2 = 0$

Y la recta

$$L : \begin{cases} x' = 3 + 4\lambda \\ y' = 7 + \lambda \\ z' = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Hallar $L \cap \pi$ en cualquier base
b) Escribir n_π en ambas bases

4) Sea f(X) $\in \mathbb{R}[X]$ tal que al aplicarle la regla de Laguirre-Thibault con un valor a=3 para hallar cotas superiores de sus raíces reales, obtenemos un coeficiente negativo con el cociente. ¿Qué conclusión se puede sacar?

5) Escribir el enunciado del Teorema Fundamental del Álgebra.

6) Demostrar usando el principio de inducción, que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ vale que $8^n - 1$ es múltiplo de 7.

7) Sea $[T]_c = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) ¿Es posible hallar una base ortonormal formada por autovectores de T? Justificar.
b) Hallar los correspondientes autovectores y autovalores.
c) ¿Es posible hallar una base B tal que $[T]_B$ sea diagonal? Justificar.