A

Lenguajes Formales y Autómatas

1° Examen Parcial - 2023

Apellido y Nombre: *LU:*

Fecha: 28-04-2023 *Cantidad de hojas entregadas (sin enunciado):* 5

Resuelva los ejercicios en hojas separadas con nombre y apellido.

EJERCICIOS

Ejercicio 1.

José es el director técnico de un equipo de fútbol y debe decidir si convoca a un jugador para el siguiente partido. Si el jugador está lesionado entonces no lo va a convocar. Por otro lado, José es muy riguroso con los entrenamientos. Por lo tanto, si el jugador no fue a entrenar, entonces no lo va a dejar jugar tampoco, al menos que el partido sea decisivo. En el resto de los casos, lo convocará.

a. ¿Cuáles son las variables que determinan si Jose convoca a un jugador o no?
b. Describa -a través de una tabla de verdad- una función booleana "convoca" que modele la situación descripta. ¿Cuántos argumentos tiene esta función? Indique claramente qué representa cada argumento.
c. Encuentre una fbf en Forma Normal Conjuntiva y otra en Forma Normal Disyuntiva equivalentes a esa función booleana. Explique cómo obtener esas fbfs.
d. ¿Las fórmulas obtenidas son completas?
e. Como ya sabe, la fbf en Forma Normal Disyuntiva es una disyunción de conjunciones. ¿Qué representa cada una de esas conjunciones en el contexto de este problema?

Ejercicio 2.

Realice una prueba directa y una prueba indirecta para la siguiente tautología:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Indique claramente cada paso de la prueba realizada, apelando a las reglas de inferencia y equivalencias utilizadas.

Ejercicio 3

Demuestre o refute la siguiente propiedad sobre conjuntos:

Si $A - B = A$, entonces $A \cap B = \emptyset$

Ejercicio 4

Considere las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto S = {1,2,3,4}

$R1 = \{(x,x) : x \in S\}$	$R2 = \{\}$	$R3 = (R1 - R4) \cup \{(1,2)\}$
$R4 = \{(x,y): x \in S, x > y\}$	$R5 = R1 \cup R4$	$R6 = \{(3,2),(2,3),(2,1)\}$

a. Calcular las siguientes clausuras

i. r(t(R4)) ii. s(r(R2)) iii. s(R5) iv. t(R3 U R6)

b. Para las relaciones R4,R5,R6 dar los grafos que las representan.
c. Para las relaciones R1,R2,R3 dar las matrices de adyacencia que las representan
d. ¿Cuáles de las relaciones propuestas son relaciones de equivalencia sobre S?

Ejercicio 5

a. Para cada uno de los siguientes incisos dar, si es posible, una relación definida sobre

A = {a,b,c} lo más pequeña posible que satisfaga las propiedades mencionadas:

i. reflexiva, irreflexiva, simétrica, no transitiva.
ii. antisimétrica, irreflexiva, transitiva.
iii. no reflexiva, no irreflexiva, simétrica.

b. Considere el conjunto $D = \{x : x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ y considere la relación

$$R = \{(x,y) \mid y \text{ es múltiplo de } x\}$$

definida sobre D.

i. Demostrar que R es una relación de orden parcial.
ii. Dar el diagrama de Hasse asociado a R. Indicar elementos maximales y minimales de R.

① JUGADOR LESIONADO: L
SÍ ENTRENÓ: E
PARTIDO DECISIVO: D

Ⓐ -SON SI EL JUGADOR ESTÁ LESIONADO, EN CUYO CASO BAJO NINGUNA CIRCUNSTANCIA LO CONVOCA;
- SI FUE A ENTRENAR, LO CONVOCA, CASO CONTRARIO NO, EXCEPTO SI EL PARTIDO ES DECISIVO. ✓

Ⓑ $f(L,E,D)$

L	E	D	CONVOCA
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

LA FUNCIÓN TIENE TRES ARGUMENTOS, UNO POR CADA VARIABLE PREVIAMENTE MENCIONADA. ✓
EL ARG. 'L' ES VERDADERO, SI EL JUGADOR ESTÁ LESIONADO, ✓
'E' ES VERDADERO SI EL JUGADOR FUE A ENTRENAR ✓
Y 'D' ES VERDADERO SI EL PARTIDO QUE SE JUEGA ES DECISIVO. ✓ ✓

Ⓒ PARA LA FNC, BUSCAREMOS LAS FILAS DE LA TABLA DONDE LA FUNCIÓN NOS DEVUELVE FALSO. LUEGO, EN CADA FILA BUSCAREMOS LAS VARIABLES Y LAS UNIREMOS CON DISYUNCIONES. SI EL VALOR DE VERDAD DE UNA VARIABLE ES FALSO, LA ESCRIBIREMOS COMO ESTÁ, Y SI ES VERDADERO, LA NEGAREMOS. REPETIREMOS EL PROCESO PARA CADA FILA, Y LOS TÉRMINOS OBTENIDOS EN CADA UNA SERÁN UNIDOS CON CONJUNCIONES. ✓

PARA LA FND, HAREMOS ALGO SIMILAR, PERO BUSCANDO LAS FILAS DONDE LA FUNCIÓN DEVUELVE VERDADERO. UNIREMOS LAS VARIABLES CON CONJUNCIONES, SI EL VALOR DE VERDAD DE ESTAS ES VERDADERO LA ESCRIBIREMOS COMO ESTÁ Y SI ES FALSO LA NEGAREMOS. FINALMENTE, UNIREMOS LOS TÉRMINOS CON DISYUNCIONES. ✓

A MODO DE COMPROBACIÓN.

L	E	D	f(L,E,D)		¬L∧E∧D	¬L∧E∧¬D	¬L∧¬E∧D	D∨¬D
T	T	T	F	→(¬L∨¬E∨¬D)	F	F	F	F
T	T	F	F	→(¬L∨¬E∨D)	F	F	F	F
T	F	T	F	→(¬L∨E∨¬D)	F	T	F	F
T	F	F	F	→(¬L∨E∨D)	F	T	F	F
F	T	T	T	→(¬L∧E∧D) ①	T	F	F	T
F	T	F	T	→(¬L∧E∧¬D) ②	F	T	F	T
F	F	T	T	→(¬L∧¬E∧D) ③	F	F	T	T
F	F	F	F	→(L∨E∨D)	F	F	F	F

FORMA NORMAL DISYUNTIVA: $(\neg L \wedge E \wedge D) \vee (\neg L \wedge E \wedge \neg D) \vee (\neg L \wedge \neg E \wedge D)$ ✓

FORMA NORMAL CONJUNTIVA: $(\neg L \vee \neg E \vee \neg D) \wedge (\neg L \vee \neg E \vee D) \wedge (\neg L \vee E \vee \neg D) \wedge (\neg L \vee E \vee D) \wedge (L \vee E \vee D)$. ✓

① SON COMPLETAS, PORQUE LA FUNCIÓN TIENE TRES ARGUMENTOS, Y CADA UNO DE ELLOS APARECE EN CADA TÉRMINO DE LAS FORMAS NORMALES. ✓

(E) REPRESENTAN CADA POSIBLE ESCENARIO DONDE SE CUMPLEN LAS CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE EL DIRECTOR TÉCNICO DECIDA CONVOCAR A UN JUGADOR. PARA EJEMPLIFICAR, TOMEMOS UN TÉRMINO DE LA FND. ✓

$\neg L \wedge E \wedge \neg D$.

ESTO SE INTERPRETA COMO "EL JUGADOR NO ESTÁ LESIONADO Y FUE A ENTRENAR Y NO ES UN PARTIDO DECISIVO".

POR LO TANTO, EL DT. DECIDE CONVOCARLO. ✓

$A \to B \equiv \neg A \vee B \equiv B \vee \neg A$

② $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

PRUEBA DIRECTA.

① $A \to B$	PREMISA	
② $B \to C$	PREMISA SUBPRUEBA	$(B \to C) \to (A \to C)$
③ $A \to C$	SIL. HIP. ①, ②	PC.
④ $(B \to C) \to (A \to C)$	PRUEBA DIRECTA ②, ③	FIN SUBPRUEBA
⑤ $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	PRUEBA DIRECTA ①, ④.	PC.

PRUEBA INDIRECTA.

① $A \to B$	PREMISA
② $\neg((B \to C) \to (A \to C))$	PREMISA PI.
③ $\neg((\neg B \vee C) \to (\neg A \vee C))$	EQUIV. IMPLICACIÓN ②
④ $\neg(\neg(\neg B \vee C) \vee (\neg A \vee C))$	EQ. IMP. ③
⑤ $\neg((B \wedge \neg C) \vee (\neg A \vee C))$	DE MORGAN ④
⑥ $\neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg A \vee C)$	DE MORGAN ⑤
⑦ $(\neg B \vee C) \wedge (A \wedge \neg C)$	DE MORGAN ⑥
⑧ $\neg B \vee C$	SIMP. ⑦
⑨ $A \wedge \neg C$	SIMP. ⑦
⑩ $\neg C$	SIMP. ⑨
⑪ $\neg B$	SIL. DISY. ⑧, ⑩
⑫ $\neg A \vee B$	EQ. IMP. ①
⑬ $\neg A$	SIL. DISY. ⑪, ⑫
⑭ A	SIMP. ⑨
⑮ $A \wedge \neg A$	CONJ. ⑬, ⑭
⑯ FALSE	EQ. ⑮
⑰ $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	PI. ①, ②, ⑯.

Exc.

EJEMPLO 3. .

③ SI $A-B=A$, ENT. $A\cap B=\phi$.

Si un comp. resulta con hueco en vacío, ES vacío.

Ⓐ SI $A-B=A$, ENT. $A\cap B\subseteq\phi$ ⓘ

SEA* $x\in A\cap B$, ENT. $x\in A$ Y $x\in B$.

COMO $x\in A$ Y COMO POR HIP. $A=A-B$, ENT. $x\in A$ Y $x\in B'$ ⓘⓘ.

DE ⓘ Y ⓘⓘ SE TIENE QUE $x\in B$ Y $x\in B'$. ABSURDO.

$\therefore A\cap B\subseteq\phi$

Ⓑ SI $A-B=A$, ENT. $\phi\subseteq A\cap B$. → $\phi\subseteq S$ para todo conj. S. Esto se verifica trivialmente

SEA $x\in\phi$. ABSURDO. $\therefore\phi\subseteq A\cap B$.

EN Ⓐ Y Ⓑ SE LLEGÓ A UN ABSURDO. EN Ⓐ EL ABSURDO PROVINO DE SUPONER QUE $A\cap B$ CONTENÍA UN ELEMENTO. DE Ⓐ SE OBTIENE QUE $A\cap B\subseteq\phi$

Y DE Ⓑ SE OBTIENE QUE $\phi\subseteq A\cap B$.

POR LO TANTO, LA PROPOSICIÓN SI $A-B=A$, ENT. $A\cap B=\phi$ ES VERDADERA.

* Sup. por abs. que → $A\cap B\neq\emptyset\equiv A\cap B\neq\phi$, pues que existe un x tal que $x\in A\cap B\rightarrow x\in A$ y $x\in B$

④ $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$R1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ / $R2 = \phi$ ×

$R3 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ / $R4 = \{(4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)\}$

$R5 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

$R6 = \{(3,2), (2,3), (2,1)\}$

Ⓐ ⓘ $t(R4) = R4$ ✓ $r(t(R4)) = \{(4,4), (4,3), (4,2), (4,1), (3,3), (3,2), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)\}$ ✓

ⓘⓘ $r(R2) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ ✓

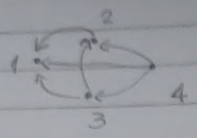
$s(r(R2)) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ ✓

ⓘⓘⓘ $s(R5) = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,3), (4,1), (1,4), (4,2), (2,4), (4,3), (3,4), (4,4)\}$ ✓

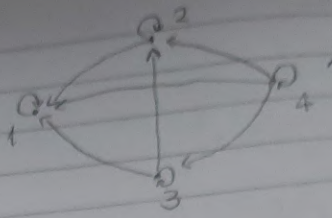
ⓘⓥ $R3 \cup R6 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4)\}$

$t(R3 \cup R6) = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1)\}$ ✓

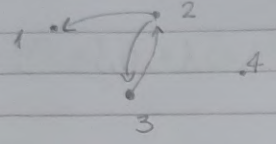
(B) R4.



R5.



R6.



(C) R1

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

R2

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

R3

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

(D) SOLO R1 ES RELACIÓN DE EQUIVALENCIA, POR SER REFLEXIVA, SIMÉTRICA Y TRANSITIVA.

⑤ (A) $A = \{a, b, c\}$

(i) NO ES POSIBLE DAR UNA RELACIÓN QUE SEA REFLEXIVA E IRREFLEXIVA AL MISMO TIEMPO. ✓
SI $\forall x \in A$, $(x,x) \in R$, ES REFLEXIVA PERO NO IRREFLEXIVA.
SI $\forall x \in A$, $(x,x) \notin R$, ES IRREFLEXIVA PERO NO REFLEXIVA.

(ii) $R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ ✗ No es la más pequeña

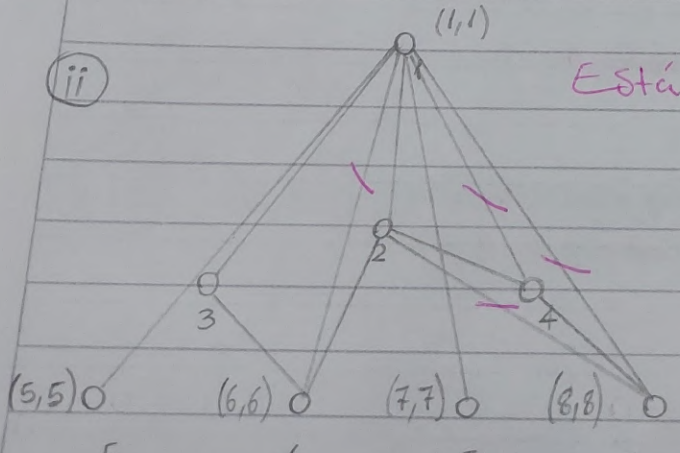
(iii) $R = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$ ✗ No es la más pequeña

$D = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(B) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(4,4),(4,8),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8)\}$

(i) SE CUMPLE LA REFLEXIVIDAD. $\forall x \in D$, $(x,x) \in R$. ✓
SE CUMPLE LA ANTISIMETRÍA. SI $(x,y) \in R$ Y $(y,x) \in R$, ESTO SOLO ES POSIBLE SI $x = y$. ✓
SE CUMPLE LA TRANSITIVIDAD. SI $(x,y) \in R$ Y $(y,z) \in R$, ENTONCES $(x,z) \in R$. ✓

(ii)



Está al revés

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	•	•	•	•	•	•	•	•
2		•		•		•		•
3			•			•		
4				•				•
5					•			
6						•		
7							•	
8								•

Faltan minimales y maximales