Análisis Matemático III

Primer Examen Parcial - 29/04/2024

Apellido y nombres: . . . . . L.U.Nº: . . . . . .

Realizar los ejercicios en hojas separadas, con nombre y apellido.

Firmar la hoja al finalizar cada ejercicio.

Todos los ejercicios deberán estar debidamente justificados.

1. Representar gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo, indicando si son abiertos, cerrados, acotados, compactos, arco conexos.

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |2z - i| \leq 2\,\mathrm{Im}z\}$,

   (b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : \dfrac{|z-i|}{|i-z|} = 1\right\}$.

2. (a) Para las siguientes sucesiones $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, hallar, si existe, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

   i. $z_n = \dfrac{(-i)^n}{n}$,

   ii. $z_n = e^{in\pi}$.

   (b) Estudiar la convergencia de las siguientes series, indicando si es absoluta o condicional.

   i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2n)}{n^3}$,

   ii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n}$,

3. Hallar, si existe, el límite de las siguientes funciones en los puntos indicados.

   (a) $f(z) = \dfrac{|z-1|^2}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$,

   (b) $f(z) = \dfrac{z^2-4}{z^2+2z}$, $z_0 = -2$.

4. (a) Hallar, si existen, los subconjuntos del plano complejo donde las siguientes funciones son continuas, derivables, holomorfas. En los puntos donde sea posible, calcular $f'(z)$.

   i. $f(z) = f(x+iy) = 2x^2+y+i(y^2-x)$,

   ii. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{4\mathrm{sen}z - 3i} + Log(z+i)$.

   (b) Demostrar que $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2$ y hallar, si existe, una función entera f que verifique $\mathrm{Re}f = u$ y $f(i) = -1 + 2i$.

5. Calcular las siguientes integrales.

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\bar{z}\,\mathrm{Re}z}{|z|}\,dz, \quad \gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = 2e^{it}$,

   (b) $\displaystyle\int_\gamma e^{z^2+1} z\,dz, \quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = -i(1-t) + it$,

   (c) $\displaystyle\int_{\partial B_3(2i)} \frac{1}{z\,(z^2+4)}\,dz$.