

Segundo Parcial de Álgebra y Geometría

(23 de febrero de 2022)

Ejercicio 1. Sea

$$\ell : (x, y) = (-2, 4) + \lambda(2, -3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

la ecuación vectorial que define la recta ℓ en el plano.

(a) Considere la recta $\ell_0 : \frac{x-2}{b} = a - y$.

Encuentre los valores reales de a y b , sabiendo que ℓ_0 es perpendicular a ℓ y que pasa por el punto $A(-1, 5)$.

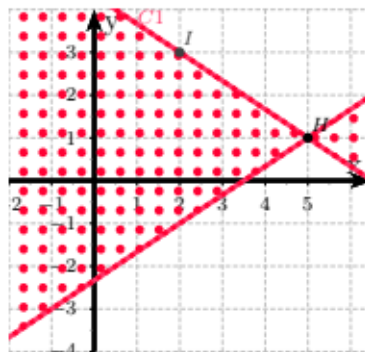
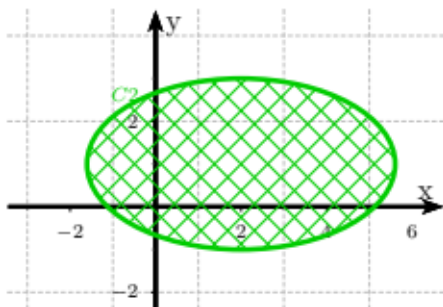
(b) Determine la ecuación de una recta paralela a ℓ y que se encuentre a una distancia de $10/\sqrt{13}$ de la misma. ¿Es única? **(Justificar)**

(c) Determine analíticamente $\ell_0 \cap \ell_1$, siendo ℓ_1 la recta hallada en el apartado (b).

Ejercicio 2. (a) Determinar una ecuación el sistema (O, XY) que caracterice a una parábola con su foco en $A(4, 1)$, que contiene al punto $P(6, 3)$ y su eje de simetría es paralelo a la recta de ecuación $(x, y) = (7, 2) + t(\sqrt{2}, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. ¿Existe una única parábola en estas condiciones? **(Justificar)**

(b) Hallar la ecuación en el sistema (O, XY) de la hipérbola de focos $F_1(-1, 8)$ y $F_2(3, 0)$ y un vértice en $V(2, 2)$. Representar e indicar claramente los sistemas de referencias involucrados y sus bases asociadas.

Ejercicio 3. Teniendo en cuenta el siguiente dibujo



(a) Indicar en forma de conjunto:

- la región sombreada C_1 : par de rectas incidentes en el punto $B(5, 1)$. El punto $I(2, 3) \in C_1$
- la región sombreada C_2 : elipse con focos en los puntos $B(5, 1)$ y $J(-1, 1)$; y uno de sus vértices en el punto $I(2, 3)$

(b) Realizar un gráfico que represente la intersección entre ambas regiones.

Ejercicio 4. Sea $S = \overline{\left\{ \vec{a} = (1, 1, 8), \vec{b} = (1, -2, -7), \vec{c} = (0, 1, 5) \right\}}$.

- Determinar todos los valores reales $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{u} = (k+1, k, 2k+4) \in S$
- Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$, de módulo 2 que sean perpendiculares simultáneamente a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejercicio 5. Dado el subespacio $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 0, x - 4y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

- Indicar tres bases distintas del subespacio M . Podría ser alguna de ellas una base ortonormal? En caso afirmativo indíquela.
- Extender, si es posible, una base de las elegidas en el inciso anterior a una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Sean $\vec{w} = (-16, 0, 12)$ y $\vec{v}$ un vector en $\mathbb{R}^3$ cuyo modulo es 4 y tal que forma un ángulo de $\pi/3$ con $\vec{w}$. Dado el caso que $\langle -2\vec{v} - \vec{u}, \vec{w} \rangle = -20$, calcular: $\langle \vec{u}, -\frac{1}{3}\vec{w} \rangle$

Ejercicio 7. Sean $B = \{\vec{b}_1 = (2, 1, 1), \vec{b}_2 = (-1, 1, 0), \vec{b}_3 = (0, 1, 3)\}$ y $B' = \{\vec{b}'_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_3, \vec{b}'_2 = \vec{b}_2 - \vec{b}_3, \vec{b}'_3 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$.

- Hallar la matriz de cambio de base $[B]_{B'}$.
- Determinar si los vectores $(\vec{u})_B = (-1, -1, -4)$ y $\vec{w}_{B'} = (1, 3, -2)$ son equipolentes.

Ejercicio 8. Dadas:

$$L_1 : (x, y, z) = (2, 1, -3) + \alpha \left(\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2} \right), \alpha \in \mathbb{R},$$

$$L_2 : \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}, \quad L_3 : \begin{cases} x = -1 + 3\beta \\ y = 6\beta \\ z = 5 + 15\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

- Decir las posiciones relativas de las rectas L_1 y L_2 ; L_1 y L_3 y L_2 y L_3 .
- Hallar, si es posible, una ecuación de:
 - un plano que contenga a la recta L_1 y no contenga a las otras dos rectas.
 - un plano que contenga a las rectas L_1 y L_2 .
 - un plano que contenga a las tres rectas.