A

Métodos de Computación Científica

Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur
Segundo Cuatrimestre de 2018

Primer Parcial

Apellido y Nombre: [redacted] LU: [redacted]

Cantidad de hojas entregadas (sin enunciado): 5

Realice cada ejercicio en hoja separada

Ejercicio. I. Errores

a) Resuelva los siguientes items:

- Enuncie la fórmula general de propagación de errores para una $f(\overline{\mathrm{x}})$ genérica, donde $\overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^n$.
- Dados $\overline{\mathrm{x}} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y la función: $f_1(\overline{\mathrm{x}}) = f_1(x, y) = \frac{10}{3x-y}$.
  Desarrolle la fórmula general de propagación de errores para determinar una cota para el error absoluto al calcular f_1 **
- Utilice la fórmula general de propagación de errores para encontrar una cota para el error absoluto al calcular $f_1(\overline{\mathrm{x}})$ en los siguientes valores medidos:
  - $\overline{\mathrm{x}}_1 = (x_1, y_1) = (1{,}99 \pm 0{,}005, \quad 6{,}00 \pm 0{,}005)$
  - $\overline{\mathrm{x}}_2 = (x_2, y_2) = (1{,}99 \pm 0{,}005, -2{,}00 \pm 0{,}005)$

b) Utilice los datos del punto anterior para:

- Determinar una cota para el error relativo para $f_1(\overline{\mathrm{x}}_1)$ y $f_1(\overline{\mathrm{x}}_2)$.
- Obtener el número de *dígitos decimales correctos* y el número de *cifras significativas correctas* que pueden asegurarse al calcular $f_1(\overline{\mathrm{x}}_1)$ y $f_1(\overline{\mathrm{x}}_2)$.
- Comparar con el número de *dígitos decimales correctos* y el número de *cifras significativas correctas* en los operandos.

c) Resuelva los siguientes items referidos al número de condición de funciones:

- Enuncie su fórmula y explique cómo se utiliza el número de condición $(\mathcal{K}_f)$ para determinar el condicionamiento de una función genérica $f(x)$.
- Calcule el valor del número de condición $\mathcal{K}_f$ para la función f_1 en $\overline{\mathrm{x}}_1$ y $\overline{\mathrm{x}}_2$, utilizando $\|\overline{\mathrm{x}}\|_1$ en lugar de $|x|$ y sabiendo que:
  - $\|f_1'(\overline{\mathrm{x}}_1)\|_1 = 166{,}667$
  - $\|f_1'(\overline{\mathrm{x}}_2)\|_1 = \quad 0{,}002$

  ¿Qué conclusiones puede sacar respecto a estos resultados?

Ejercicio. II. Algebra Matricial y Norma de Matrices

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Utilice propiedades para calcular los siguientes items de la forma más eficiente posible **utilizando propiedades** (es decir, evite calcular inversas). Enuncie en cada item las propiedades utilizadas para la correspondiente resolución:

1) $(2\mathbf{B}^T)^{-1}$

** **Nota.** Tenga en cuenta que
- si transforma $f(x)$ en $f(u)$ con $u = u(x)$, entonces $\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x}$
- si $f(u) = \frac{k}{u^n}$, entonces $\frac{\delta f}{\delta u} = -\frac{kn}{u^{n+1}}$

2) $((A^{-1})^T\mathbf{B}^T)^{-1}$

3) $det(((\mathbf{AB}^{-1})^{-1})^T)$ (dejar expresado en fracciones)

b) Enuncie las propiedades que debe cumplir una función para conformar una *Norma de Matrices*.
Utilice las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

para mostrar si la función $\|.\|_\phi = n(\max_{1\leq i,j\leq n}\{|a_{ij}|\})$ es una Norma de Matrices, donde n es la dimensión de las matrices ($A, B \in R^{n\times n}$, para el ejemplo $n = 2$).

c) Calcule $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ utilizando $\|.\|_\infty$ para la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1000 & 1000 \end{bmatrix}, \text{ cuya inversa es } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}0005 \\ -0{,}5 & 0{,}0005 \end{bmatrix}$$

¿Qué indica este valor? Justifique.
Dar una cota para el error relativo en la solución $(\mathbf{x}^*)$ para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, suponiendo que tanto los elementos de $\mathbf{A}$ como los de $\mathbf{b}$ están redondeados a 2 dígitos correctos.

Ejercicio. III. Métodos Directos

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{y el vector} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a) Sin intentar encontrar ninguna factorización para $\mathbf{A}$, explique en qué consiste la factorización de Cholesky y por qué puede asegurar que $\mathbf{A}$ admite dicha factorización.
Realice la factorización de Cholesky para $\mathbf{A}$.

b) Resuelva el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ haciendo uso de la factorización encontrada.
Realice el producto $\mathbf{Ax}$ y verifique que la solución encontrada en el inciso anterior (es decir $\mathbf{x}$) cumple la igualdad $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

c) Calcule el determinante de $\mathbf{A}$ a partir de la factorización obtenida en a).
¿Qué sucede con este sistema si cambiamos el elemento a_{31} por un 1, el a_{33} por un 4 y el a_{33} por un 5? Justifique.

a_{32}

[redacted]

19/09/2018
Hoja 1/5

Ejercicio 1:

ⓐ

-) Fórmula de propagación de errores:

$$|f(\bar{x}^*) - f(\bar{x})| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\right| |x_i^* - x_i|$$

-) Tomando $u(x,y) = 3x - y \Rightarrow f(u) = \frac{10}{u} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{10}{u^2}$

Cálculo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{10}{u^2}\cdot 3 = \frac{-30}{(3x-y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{10}{u^2}(-1) = \frac{10}{(3x-y)^2}$

La cota del error absoluto queda:

$$|f(\bar{x}^*) - f(\bar{x})| \le \left|\frac{-30}{(3x-y)^2}\right| E_{ax} + \left|\frac{10}{(3x-y)^2}\right| E_{ay}$$

$\bar{x}_1$ -) $E_{ay} \le \left|\frac{-30}{(3\cdot 1{,}99 - 6)^2}\right| \frac{10^{-2}}{2} + \left|\frac{10}{(3\cdot 1{,}99 - 6)^2}\right| \frac{10^{-2}}{2}$

$\Rightarrow E_{ay} \le \left|\frac{-30}{9\cdot 10^{-4}}\right| \frac{10^{-2}}{2} + \left|\frac{10}{9\cdot 10^{-4}}\right| \frac{10^{-2}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{E_{ay} \le \frac{40}{9\cdot 10^{-4}} \frac{10^{-2}}{2} \simeq 222{,}22}$

$\bar{x}_2$ -) $E_{ay} \le \left|\frac{-30}{(3\cdot 1{,}99 + 2)^2}\right| \frac{10^{-2}}{2} + \left|\frac{10}{(3\cdot 1{,}99 + 2)^2}\right| \frac{10^{-2}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{E_{ay} \le \frac{40}{63{,}5209} \frac{10^{-2}}{2} \simeq 3{,}15 \cdot 10^{-3}}$

b) –) El error relativo para $F(\bar{x}) = \frac{|F(\bar{x}) - F(\bar{x}^*)|}{F(\bar{x})} = \left|\frac{E_{ay}}{F(\bar{x})}\right|$

Entonces, para $\bar{x}_1$ queda.

$$\boxed{E_{ry} \leq \left|\frac{222,22}{F(7,99,6)}\right| \simeq 0,6667}$$

Y para $\bar{x}_2$, queda.

$$\boxed{E_{ry} \leq \left|\frac{3,75 \cdot 10^{-3}}{F(2,99,-2)}\right| \simeq 0,00257}$$

–) Para $\bar{x}_1$, no tiene decimales correctos ya que:

$$\nexists\, t \,/\, t > 0 \text{ y } 0,5 \cdot 10^{-t} \geq 222,22$$

Tampoco tiene cifras significativas correctas ya que:

$$\nexists\, t \,/\, t > 0 \text{ y } 0,5 \cdot 10^{-t} \geq 0,6667$$

Para $\bar{x}_2$, tiene 2 decimales correctos ya que

$$0,5 \cdot 10^{-2} \geq 0,375 \cdot 10^{-2}$$

y tiene 2 cifras significativas correctas ya que

$$0,5 \cdot 10^{-2} \geq 0,257 \cdot 10^{-2}$$

–) $\bar{x}_1$ tiene 2 decimales correctos tanto en x como en y

$$E_{r\bar{x}_1} = (0,257 \cdot 10^{-2}, 0,833 \cdot 10^{-3})$$

$\bar{x}_1$ tiene 2 cifras significativas en x y 2 cifras significativas correctas en Y

[redacted]

19/09/2018
Hoja 2/5

Al comparar se observa que para errores chicos en $\bar{x}_1$ el error en $f(\bar{x}_1)$ se amplifica mucho, tanto en error absoluto como relativo.

$\bar{x}_2$ Tiene 2 dígitos decimales correctos en x e Y

$E_{r\bar{x}_2} = (0{,}251 \cdot 10^{-2}, 925 \cdot 10^{-2})$

$\bar{x}_2$ Tiene 2 cifras significativas correctas en x e Y

Al comparar, se observa que para $\bar{x}_2$ se conserva el error relativo y también el absoluto.

ⓒ $\boxed{k_f = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| |x|}$

Un valor elevado de k_f significa que para ese x la f está mal condicionada, ya que pequeños errores relativos en x lleva a que haya grandes errores relativos en Y, ya que:

$E_{r_Y} \leq k_f E_{r_X}$

Para $\bar{x}_1$, tenemos que: $k_f \simeq \frac{766{,}667}{|-333{,}331|} \cdot 1{,}99 \simeq 3{,}995$

Para $\bar{x}_2$, tenemos: $k_f \simeq \frac{0{,}002}{1{,}255} \cdot 3{,}99 \simeq 6{,}36 \cdot 10^{-3}$

Comparando k_f para $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$, se ve como en $\bar{x}_1$ es mucho mayor a $\bar{x}_2$ y por esto en $f(\bar{x}_1)$ se amplifica el error en $\bar{x}_1$

[redacted]

19/09/2018
Hoja 3/5

Ejercicio 2:

(b)

Propiedades para la norma de matrices:

1- $\|kA\| = |k|\,\|A\|$, k escalar

2- $\|A\| > 0$, $\|A\| = 0$ si $A = 0$

3- $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4- $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

Pruebo $\|.\|_{\emptyset}$ para A y B:

$\|A\|_{\emptyset} = 2.2 = 4$, $\|B\|_{\emptyset} = 2.3 = 6$

$\Rightarrow \|.\|_{\emptyset} > 0$ ✓

$\|kA\|_{\emptyset} = 2.|k.2| = |k|.4 = |k|\,\|A\|_{\emptyset}$

$\|kB\|_{\emptyset} = 2.|k.3| = |k|.6 = |k|\,\|B\|_{\emptyset}$

$\Rightarrow \|k.\|_{\emptyset} = |k|\,\|.\|_{\emptyset}$ ✓

$\|A+B\| = 2.3 = 6$ $\quad \|A\| + \|B\| = 4 + 6 = 10$

$\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ✓

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|AB\| = 2.7 = 14$ $\quad \|A\|\,\|B\| = 4.6 = 24$

$\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ ✓

$\Rightarrow$ La norma $\|.\|_{\emptyset}$ se cumple para A y B

c) $k(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$

$\|A\|_\infty = 2000$

$\|A^{-1}\|_\infty = 0,5005$

$\Rightarrow \boxed{k(A) = 1001}$

$k(A)$ dió un valor elevado por lo que la matriz está mal condicionada y pequeños errores en A o b amplifican el error en x.

a A está redondeada a 2 dígitos correctos, entonces:

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \frac{10^{-2}}{2} & \frac{10^{-2}}{2} \\ \frac{10^{-2}}{2} & \frac{10^{-2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 10^{-2}$$

y con b redondeado a 2 dígitos correctos, tenemos:

$$\Delta b = \begin{bmatrix} \frac{10^{-2}}{2} \\ \frac{10^{-2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = \frac{10^{-2}}{2}$$

La cota en el error relativo está dada por:

$E_{Rx} \leq k(A) E_{RA}$

$$E_{rA} = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{10^{-2}}{2000} = 0,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{Rx} \leq 1001 \cdot \frac{10^{-5}}{2} = 0,5005 \cdot 10^{-2}}$$

Para el error en b tenemos $\boxed{E_{rx} \leq k(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|} = 1001 \cdot \frac{10^{-2}}{4000} = 2,5025}$

[redacted]

19/09/2018
Hoja 4/5

② 1) $(2B^T)^{-1} = \frac{1}{2}(B^T)^{-1} = \frac{1}{2}(B^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$ ✓

¡FALTÓ ESPECIFICAR LAS PROPIEDADES USADAS!

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) $((A^{-1})^T B^T)^{-1} = ((A^T)^{-1} B^T)^{-1} = A^T (B^T)^{-1} = A^T (B^{-1})^T$

$= \begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 7 & 5 & 10\end{bmatrix}$ ×

3) $\det(((AB^{-1})^{-1})^T) \overset{(*)}{=} \det((A^{-1}B)^T) = \det(A^{-1}B) =$

$\det(A^{-1}) \cdot \det(B) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \frac{1}{\det(B^{-1})} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\,\frac{1}{-14} = \boxed{\frac{1}{-28}}$ × $-\frac{1}{56}$

(*) $\det(A) = 2$ ✗ $\to 4$ $\quad 2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$

$\det(B^{-1}) = -2\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = -4 + 2(-5) = -14$

(*) $\det(X^T) = \det(X) \to \det(((AB^{-1})^{-1})^T) = \det((AB^{-1})^{-1})$

$= \frac{1}{\det(AB^{-1})}$

¡FALTÓ ENUNCIAR QUÉ PROPIEDAD SE UTILIZÓ EN CADA CASO!

[redacted]

19/09/2018
Hoja 5/5

Ejercicio 3:

(a) La factorización de Cholesky consiste en factorizar a A como $A = U^T U$, con U matriz Triangular superior.

Para Poder realizar esa factorización, la matriz Tiene que ser simétrica y definida positiva.

A es simétrica $(A = A^T)$

Calculo los menores principales de A

$|1| = 1 > 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - 10 \cdot 4 + 14(4)$$

$$= -12 - 40 + 56 = 4 > 0$$

Entonces A es factorizable por Cholesky.

Factorizo:

$$A = U^T U \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$u_{11}^2 = 1 \Rightarrow \boxed{u_{11} = 1}$ $\qquad$ $u_{11} u_{13} = 3 \Rightarrow \boxed{u_{13} = 3}$

$u_{11} u_{12} = 2 \Rightarrow \boxed{u_{12} = 2}$

$u_{12}^2 + u_{22}^2 = 8 \Rightarrow \boxed{u_{22} = 2}$

$\overset{2}{u_{12}}\,\overset{3}{u_{13}} + \overset{2}{u_{22}}\,u_{23} = 10 \Rightarrow \boxed{u_{23} = 2}$ $\qquad$ $\overset{9}{u_{13}^2} + \overset{4}{u_{23}^2} + u_{33}^2 = 14 \Rightarrow \boxed{u_{33} = 1}$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $Ax = b$ $\quad U^TUx = b \Rightarrow U^Ty = b$ y $Ux = y$

$\underline{U^Ty = b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{y_1 = 1} \\ y_2 = 2y_1 + 2y_2 = 6 \Rightarrow \boxed{y_2 = 2} \\ y_3 = 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow \boxed{y_3 = 3} \end{array}$$

$\underline{Ux = y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = -4} \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = -2} \\ \boxed{x_3 = 3} \end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow x^T = [-4, -2, 3]}$$

$\underline{Ax}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} = (-4 - 4 + 9) \\ = (-4 - 16 + 30) \\ = (-12 - 20 + 42) \end{array}$$

(c) $\det(A) = \det(U^TU) = \det(U^T)\det(U) = 2 \cdot 2 = 4$

con el cambio, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Se puede ver que $L_3^T = 2L_2^T$, entonces el rango de $A' = 2$, por lo que no hay una única solución x para $A'x = b$ y el determinante de A' es 0 y no se puede factorizar en U^TU