Tema II

Análisis Matemático I - Segundo Parcial

Nota: 80
Nº de orden:
Apellido y nombres:
Carrera:

Importante: Se deben realizar los ejercicios en hojas separadas. Indicar en cada hoja nombre completo,tema, n° de orden y ejercicio n°:... en letra imprenta clara y firmar la última hoja del examen indicando la cantidad de hojas entregadas.

1. *a)* Hallar la derivada de la función $f(x) = (3 + \text{sen}(x))^x$.
   b) Aproximar el valor de $(1.1)^3 \ln(1.1)$ utilizando una adecuada aproximación lineal.
   c) En una pila cónica se está dejando caer arena a razón de 12 m^3/min. Si la altura de la pila es siempre el doble del radio de la base. ¿En qué razón aumenta la altura cuando la pila tiene 10 metros de altura? (Volumen de un cono: $V = \pi r^2 h$)

2. *a)* Calcular los siguientes límites:

   1) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(\text{sen}\, x)$

   2) $\lim\limits_{x \to 0^+} (3x + 1)^{\text{cotg}(x)}$

   b) Para la función $f(x) = (x + 2)\ln^2(x + 2)$ se pide hallar: dominio, intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

3. *a)* Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ se pide hallar: intervalos de concavidad, y los puntos de inflexión.
   b) ¿Tiene extremos absolutos la función del inciso anterior en el intervalo $[0, 3]$? Justificar la respuesta.
   c) Graficar la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = \frac{1}{x}$, $y = 4x$, $y = \frac{1}{4}x$. **Plantear** la/s integral/es que permiten calcular el área de la región.

4. *a)* Resolver las siguientes integrales:

b) $\displaystyle\int \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 7}}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 (x + 2)e^{3x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}}\, dx$

e) $\displaystyle\int x^5 \sec^2(x^3)\, dx$

HOJA 1

TEMA II

HOJA N° ㉔

FECHA

① Ⓐ $Y = (3+SEN(x))^{x}$ / $\ln(Y) = \ln[(3+SEN(x))^{x}]$ ✓

$\ln(Y) = x.\ln(3+SEN(x))$ ✓

DERIVACIÓN.

Ⓑ $\frac{1}{Y}.Y' = (x)'.\ln(3+SEN(x)) + x.[\ln(3+SEN(x))]'$ ✓

$\frac{Y'}{Y} = \ln(3+SEN(x)) + x.\frac{1}{3+SEN(x)}.\cos(x)$ ✓

$\frac{Y'}{Y} = \ln(3+SEN(x)) + \frac{x.\cos(x)}{3+SEN(x)}$ ✓

$Y' = \left(\ln(3+SEN(x)) + \frac{x.\cos(x)}{3+SEN(x)}\right).Y$ ✓

Ⓑ

$Y' = \left(\ln(3+SEN(x)) + \frac{x.\cos(x)}{3+SEN(x)}\right).(3+SEN(x))^{x}$ ✓

Ⓑ $(1,1)^{3}\ln(1,1)$ / $f(x) = x^{3}.\ln(x)$ ✓

$f'(x) = (x^{3})'.\ln(x) + x^{3}.(\ln(x))'$

$= 3x^{2}.\ln(x) + \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x}}$ ✓ $= 3x^{2}.\ln(x) + x^{2}$ ✓

$= x^{2}(3\ln(x)+1)$

$L(x) = f(1) + f'(1).(x-1)$ ✓

$L(1,1) = 1^{3}.\ln(1) + 1^{2}(3\ln(1)+1).(1,1-1)$

$= 0 + 1.0,10$ ✓

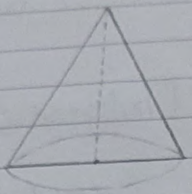
$= 0,10 \approx (1,1)^{3}\ln(1,1)$

NOTA

ⓒ $h = 2 . r$ $V = \pi r^2 h$ ✓

¿ $\frac{dh}{dt}$ CUANDO $h = 10$?

$\frac{dV}{dt} = 12 m^3/min.$ ✓



$h = 2r$

$\frac{1}{2} h = r$

Ⓑ

$V = \pi r^2 h, \quad r = \frac{1}{2} h$

$\Rightarrow V = \pi . \left(\frac{1}{2} h\right)^2 . h = \pi . \frac{1}{4} h^2 . h = \boxed{\frac{\pi}{4} h^3}$ ✓

$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{4} \pi . h^2 . \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = 12 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{3}{4} \pi . h^2 . \frac{dh}{dt} = 12}$ ✓

✓

↓

¿ $\frac{dh}{dt}$ CUANDO $h = 10$?

$\frac{3}{4} \pi . 10^2 . \frac{dh}{dt} = 12$ ✓

$75 \pi . \frac{dh}{dt} = 12$ ✓ $\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \boxed{\frac{12}{75\pi} \; m}$ ✓

¡Muy bien!

HOJA 2

TEMA II — En [illegible] [illegible], es $x \to 0^+$

2,6 P

② Ⓐ ① $\lim_{x\to 0} x.\ln(\text{SEN}(x)) \to 0.\infty$

$$\lim_{x\to 0} x.\ln(\text{SEN}(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{SEN}(x))}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(\text{SEN}(x))]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\text{SEN}(x)} . \cos(x)}{-\frac{1}{x^2}}$$ ✓

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

$(x^{-1})' = -x^{-2}$

$= -\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{\text{SEN}(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} - \frac{x^2.\cos(x)}{\text{SEN}(x)}$$ ✓

$$= - \lim_{x\to 0} \frac{x^2.\cos(x)}{\text{SEN}(x)} \overset{L'H}{=} - \lim_{x\to 0} \frac{[x^2.\cos(x)]'}{[\text{SEN}(x)]'}$$ ✓

$$= - \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'\cos(x) + x^2.(\cos(x))'}{\cos(x)} = - \lim_{x\to 0} \frac{2x.\cos(x) - x^2.\text{SEN}(x)}{\cos(x)}$$ ✓ ✓

$$= - \frac{2.0.\cos(0) - 0^2.\text{SEN}(0)}{\cos(0)} = \frac{0-0}{1} = \boxed{0}$$ ✓

② $\lim_{x\to 0^+} (3x+1)^{\text{COTG}(x)} = L$ / $\ln(L) = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} (3x+1)^{\text{COTG}(x)}\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln\left[(3x+1)^{\text{COTG}(x)}\right] = \lim_{x\to 0^+} \text{COTG}(x).\ln(3x+1)$$ ✓

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{\frac{1}{\text{COTG}(x)}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(3x+1)]'}{\left[\frac{1}{\text{COTG}(x)}\right]'} \Rightarrow$$ ✓ ✓

NOTA

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3x+1}\cdot 3}{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cos^2(x)}{3x+1} = \frac{1\cdot 3}{1}$$

$$= 1 = \ln(L) \Rightarrow \boxed{e^1 = L} \qquad (e^3)$$

$$\left[\frac{1}{\text{COTG}(x)}\right]' = \left[\frac{1}{\frac{\text{COS}(x)}{\text{SEN}(x)}}\right]'$$

$$= \left[\frac{\text{SEN}(x)}{\text{COS}(x)}\right]' = [\text{TAN}(x)]'$$

$$= \text{SEC}^2(x)$$

Ⓑ $f(x) = (x+2)\ln^2(x+2)$

$= (x+2)\ln(x+2)\ln(x+2)$

$x+2 > 0$

$x > -2$

$\Rightarrow \text{DOM}f: (-2, +\infty)$

$$f'(x) = (x+2)' . \ln^2(x+2) + (x+2).[\ln^2(x+2)]'$$

$$= \ln^2(x+2) + \frac{\cancel{(x+2)}.\,2\ln(x+2)}{\cancel{x+2}}$$

$$= \ln^2(x+2) + 2\ln(x+2)$$

$$= \ln(x+2).\ln(x+2) + 2\ln(x+2)$$

$$= \ln(x+2).[\ln(x+2) + 2]$$

$$[\ln(x).\ln(x)]' =$$

$$= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$[\ln^2(x+2)]' = 2.\frac{\ln(x+2)}{x+2}.(x+2)'$$

$$= \frac{2\ln(x+2)}{x+2}$$

SIGNO $f'(x)$.

$\ln(x+2) > 0$

$x+2 > e^0$

$x > -1$

-2 − − − -1 + + + + $\ln(x+2)$

$\ln(x+2) + 2 > 0$

$\ln(x+2) > -2$

$x+2 > e^{-2}$

$x > e^{-2} - 2$

-2 − $e^{-2}-2$ + + + + + + + + + $\ln(x+2)+2$

-2 + $e^{-2}-2$ − − − -1 + + + + + $f'(x)$

(x) CRECE EN LOS INTERVALOS $(-2, e^{-2}-2)$ Y $(-1, +\infty)$

Y DECRECE EN EL INTERVALO $(e^{-2}-2, -1)$

Muy bien!

HOJA 3

TEMA II

HOJA N°

FECHA

$\ln(x+2) . [\ln(x+2)+2] = 0$

$\ln(x+2) = 0$

$x+2 = e^0$

$x = -1$ ✓

$\ln(x+2)+2 = 0$

$\ln(x+2) = -2$

$x+2 = e^{-2}$

$x = e^{-2}-2$ ✓

MÁXIMO RELATIVO EN $x = e^{-2}-2$, MÍNIMO RELATIVO EN $x = -1$.
✓ ✓

¿cuáles son sus valores?

TEMA II

(11p)

③ⓐ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ / $f'(x) = \frac{(1)'.(x^2+1) - 1.(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}$ ✓

$$f''(x) = \frac{(-2x)'.(x^2+1)^2 + 2x.[(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4}$$

$[(x^2+1)^2]' =$
$= 2(x^2+1).2x$
$= 4x(x^2+1)$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x.4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{\cancel{(x^2+1)}.(-2(x^2+1) + 8x^2)}{(x^2+1)^{\cancel{4}}}$$ ✓

$$= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \boxed{\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}}$$ ✓

SIGNO $f''(x)$.

$6x^2 - 2 > 0$
$6x^2 > 2$
$x^2 > 1/3$
$-\sqrt{1/3} > |x| > \sqrt{1/3}$

$-\sqrt{1/3}$ $\sqrt{1/3}$
$+++ \;|\; - - - - \;|\; +++$ $6x^2-2$
0
✓

$(x^2+1)^3 > 0$
$x^2+1 > 0$
$x^2 > -1$
$x \in \mathbb{R}$

$++++ + 0 ++++$ $(x^2+1)^3$ ✓

$-\sqrt{1/3}$ 0 $\sqrt{1/3}$
$++++ \;|\; - - \;|\; - - \;|\; +++$ $f''(x)$ ✓

$f(x)$ ES CÓNCAVA HACIA ARRIBA
EN LOS INTERVALOS $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ Y $(\sqrt{1/3}, +\infty)$ ✓
Y CÓNCAVA HACIA ABAJO EN EL INTERVALO $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ ✓

PUNTOS DE INFLEXIÓN EN $x_1 = -\sqrt{1/3}$ Y $x_2 = \sqrt{1/3}$.

$P(x_1, f(x_1))$ $P(x_2, f(x_2))$

Ⓑ $f(0)=\frac{1}{0^2+1}=\boxed{1}$, $f(3)=\frac{1}{3^2+1}=\boxed{\frac{1}{10}}$

Reg

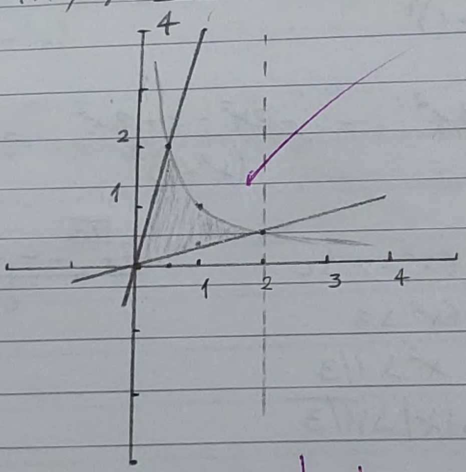
$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ | $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -2x=0$

$x=0$

NO pedi que encu tres los extr

LA FUNCIÓN TIENE EXTREMOS ABSOLUTOS EN $[0,3]$. EL MÁXIMO VALOR QUE ALCANZA $f(x)$ ES 1, Y EL MÍNIMO ES $\frac{1}{10}$.

Ⓒ $Y=\frac{1}{x}$, $Y=4x$, $Y=\frac{1}{4}x$



$\frac{1}{3}$ B

$\frac{1}{X}=4X$

$1=4X^2$

$\frac{1}{4}=X^2$ ✓ $-\frac{1}{2}=|x|=\frac{1}{2}$ X

$|x|=\frac{1}{2}$

$X=\frac{1}{2}$ $X=-\frac{1}{2}$

$$\underbrace{\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx}_{✓} - \underbrace{\left(\int_0^{1/2} \frac{1}{x}\,dx - \int_0^{1/2} 4x\,dx\right)}_{X} - \underbrace{\int_{1/2}^2 \frac{1}{4}x\,dx}_{✓}$$

planteo general = mal

NOTA

TEMA II

B

ⓑ $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x+7}}\,dx$

$u = x^2-2x+7$

$du = 2x-2\ dx$

$du = 2(x-1)$

$\frac{1}{2}du = x-1\ dx$ ✓

SUSTITUCIÓN.

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{2/3} + C$

¿? sumó en vez de multiplicar!!

$= \frac{7}{6}\sqrt[3]{u^2} + C$ => DEVUELVO SUSTITUCIÓN. $\frac{7}{6}\sqrt[3]{(x^2-2x+7)^2} + C$

ⓒ $\int_0^1 (x+2)e^{3x}\,dx$ / $\int (x+2)e^{3x}\,dx$

$u = x+2$ | $dv = e^{3x}\,dx$

$du = 1\,dx$ | $v = \frac{1}{3}e^{3x}$

$u.v - \int v\,du$ / $\frac{(x+2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx =$

$= \frac{(x+2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} = \boxed{\frac{(x+2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x}}$ ✓

$$\int_0^1 (x+2)e^{3x}\,dx = \left.\frac{(x+2)e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x}\right|_0^1$$

$$= \left(\frac{(1+2)e^{3.1}}{3} - \frac{1}{9}e^{3.1}\right) - \left(\frac{(0+2)e^{3.0}}{3} - \frac{1}{9}e^{3.0}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{3}e^3}{\cancel{3}} - \frac{1}{9}e^3\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) = \left(e^3 - \frac{1}{9}e^3\right) - \frac{5}{9}$$

$$= \boxed{\frac{8}{9}e^3 - \frac{5}{9}}$$ ✓

Ⓓ $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

debe SUSTITUIR!

$dv = \frac{1}{1+x\sqrt{x}}\,dx$

?

$v = \int \frac{1}{1+x\sqrt{x}}\,dx$

$t = 1+x\sqrt{x}$

$dt = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

Ⓔ $\int x^5 \sec^2(x^3)\,dx$

$u = x^3$

$du = 3x^2\,dx$

$= \int x^3 \sec^2(x^3)\,x^2\,dx$

$\frac{1}{3}du = x^2\,dx$ ✓

SUSTITUCIÓN.

$\frac{1}{3}\int u.\sec^2(u)\,du$

$t = u$

$dt = 1\,du$

$dv = \sec^2(u)\,du$

$v = \tan(u)$

$\frac{1}{3}\left(t.v - \int \tan(u)\,du\right) = \frac{1}{3}\left(u.\tan(u) + \ln\left|(\cos(u))\right|\right) + C$

C. AUX.

$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$u = \cos(x) \quad du = -\frac{\sin(x)}{dx}$

$-du = \sin(x)\,dx$

$-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(u)$

$= -\ln(\cos(x))$

DEVUELVO SUSTITUCIÓN.

$\frac{1}{3}\left(x^3\tan(x^3) + \ln\left|(\cos(x^3))\right|\right) + C$ ✓

NOTA HOJAS ENTREGADAS: 5