Análisis Matemático I - Primer Parcial - 29-4-22 - Tema II

Apellido y nombres:	Nota: ~~74~~ 80
Carrera:	LU. Nº:

Importante: Se deben realizar los ejercicios en hojas separadas. Indicar en cada hoja nombre completo y ejercicio n°:... en letra imprenta clara y firmar la última hoja del examen.

1. Dada la función $f(x) = 3\sqrt{|x+4|}$.
   a) Hallar las intersecciones con los ejes coordenados. Graficar e indicar dominio e imagen.
   b) Indicar si la función es inyectiva. Justificar la respuesta.
   c) Hallar la función inversa haciendo una restricción del dominio en caso de ser necesario. Graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes. Indicar dominio e imagen de la inversa hallada.

2. Calcular, si existen, los siguientes límites. Si el resultado es ∞, indicar si es $+\infty$ ó $-\infty$.
   a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{2x - 2}$
   b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{-x^2 + 2x}$
   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x\sqrt{3x^2 - 3}}{1 + 2x^2}$

3. Considerar las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$.
   a) Determinar el período de ambas funciones y graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos.
   b) Hallar analíticamente los puntos de intersección sabiendo que SEN ~~cos~~$(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$

4. Considerar la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2-4x}{x^2+x-6} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a) Hallar y clasificar las discontinuidades, en caso de ser evitable, redefinir de manera que resulte continua allí.
   b) Hallar, si existen, las asíntotas horizontales de la función. Escribir las ecuaciones correspondientes.

5. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdadera ó falsas. Justificar.
   0,22 0,71
   a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{1-(\ln(x))^2}$, se puede asegurar que existe $c \in [e^{-3/2}, e^{-1/3}]$ tal que $f(c) = -\frac{2}{3}$.
   b) Si una función es impar entonces es inyectiva.
   c) Para la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$, $x = 2$ es asíntota vertical y $x = -3$ no es asíntota vertical de la función.
   d) Si f es continua en $[1,4]$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe.

TEMA II   HOJA 1   24p.

① $f(x) = 3\sqrt{|x+4|}$

Ⓐ $\cap$ eje y: $y = 3\sqrt{|0+4|}$

10

$y = 3\sqrt{|4|}$

$y = 3\sqrt{4}$

$y = 3 \cdot 2$

$y = 6$ ✓

$\cap$ eje x: $3\sqrt{x+4} = 0$, $x+4 \geq 0$

$\sqrt{x+4} = 0$

$x+4 = 0$

$x = -4$

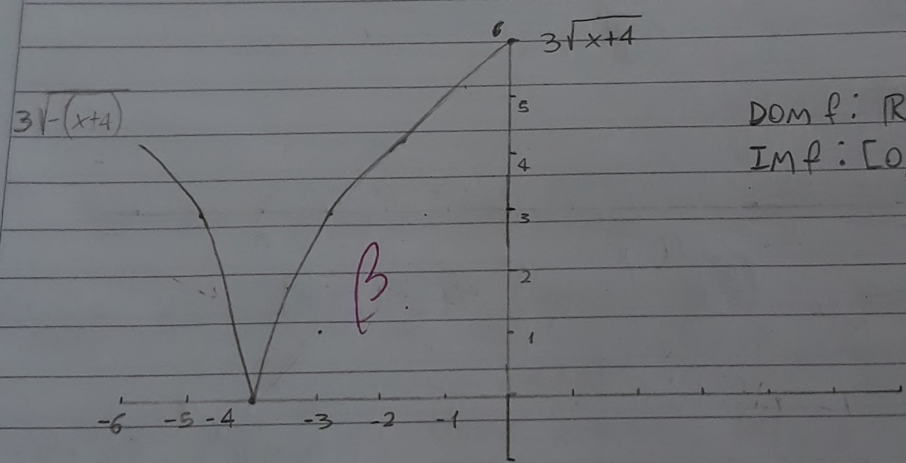
$3\sqrt{-x-4} = 0$, $x+4 < 0$

$\sqrt{-x-4} = 0$

$-x-4 = 0$

$-x = 4$

$x = -4$ ✓



DOM f: $\mathbb{R}$ ✓

IM f: $[0, +\infty)$ ✓

Ⓑ LA FUNCIÓN NO ES INYECTIVA. VEAMOS LO SIGUIENTE:

4

TOMEMOS DOS VALORES x_1, x_2 TAL QUE $x_1 \neq x_2$.

$x_1 = -2$

$x_2 = -6$.

$f(x_1) = f(-2) = 3\sqrt{|-2+4|} = 3\sqrt{|2|} = 3\sqrt{2}$.

$f(x_2) = f(-6) = 3\sqrt{|-6+4|} = 3\sqrt{|-2|} = 3\sqrt{2}$

(SIGUE) →

ENTONCES $f(x_1) = f(x_2)$ PERO $x_1 \neq x_2$. POR LO TANTO, f NO ES INYECTIVA.

ⓒ COMO f NO ES INY., RESTRINGIREMOS SU DOMINIO PARA PODER CALCULAR SU INVERSA.

$f^*(x) = 3\sqrt{x+4}$, $f^*: [-4, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$y = 3\sqrt{x+4}$$

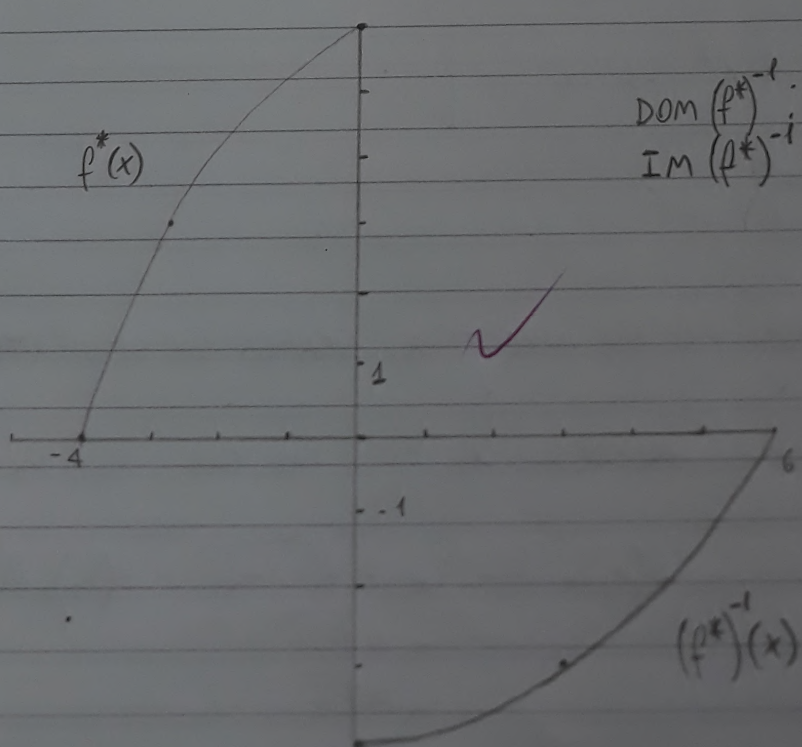
$$\frac{1}{3} y = \sqrt{x+4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 y^2 = x+4$$

$$\frac{1}{9} y^2 = x+4$$

$$\frac{1}{9} y^2 - 4 = x$$

$(f^*)^{-1}(x) = \frac{1}{9} x^2 - 4$, $(f^*)^{-1}: [0, +\infty) \rightarrow [-4, +\infty)$



DOM $(f^*)^{-1}$: $[0, +\infty)$

IM $(f^*)^{-1}$: $[-4, +\infty)$

11/08/22

TEMA II — HOJA 2 — 16

¿Justificar mejor?

6 (2) Ⓐ $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-|x-1|-1}{2x-2}$ COMO $x \to 1$ POR DERECHA, $|x-1| = x-1$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x+1-1}{2x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{2x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}}$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

2 Ⓑ $\lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{SEN}(x)}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{SEN}(x)}{x(-x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{SEN}(x)}{x} \cdot \frac{1}{-x+2}$

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\operatorname{SEN}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{-x+2} = \frac{\operatorname{SEN}(2)}{2} \cdot \frac{1}{-2+2}$

$= \frac{\operatorname{SEN}(2)}{2} \cdot \frac{1}{0} \to -\infty$

mal el signo

$= \frac{\operatorname{SEN}(2)}{2} \cdot -\infty = \boxed{-\infty}$

8 Ⓒ $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x\sqrt{3x^2-3}}{1+2x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x\sqrt{x^2\left(3-\frac{3}{x^2}\right)}}{1+2x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x.\sqrt{x^2}.\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{1+2x^2}$ ¡

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4x.|x|.\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{1+2x^2}$ COMO $x \to +\infty$, $|x| = x$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4x.x.\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{1+2x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2.\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{1+2x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{4x^2}.\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+2\right)}$

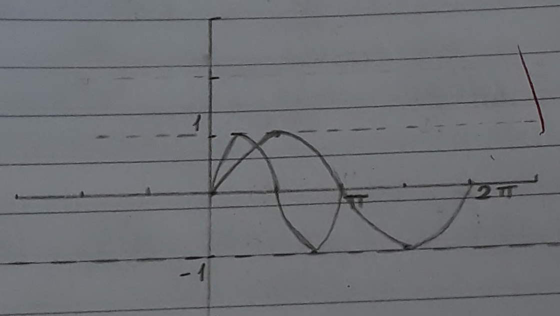
$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4\sqrt{3-\frac{3}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}+2}$ ($\frac{3}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$) $= \frac{4\sqrt{3-0}}{0+2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = \boxed{2\sqrt{3}}$

TEMA 11 | HOJA 3

③ $f(x) = \text{SEN}(x)$, $g(x) = \text{SEN}(2x)$

Ⓐ PERÍODO: $\frac{2\pi}{a}$ PERÍODO $f(x) = 2\pi$

PERÍODO $g(x) = \frac{2\pi}{2} = \pi$



B

Ⓑ HALLAR ANALÍTICAMENTE LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN, SABIENDO QUE $\text{SEN}(2X) = 2\,\text{SEN}(x).\cos(x)$

$\text{SEN}(x) = 2\,\text{SEN}(x).\cos(x)$

$\frac{2\,\cancel{\text{SEN}(x)}.\cos(x)}{\cancel{\text{SEN}(x)}} = 0$

$2\cos(x) = 0$

$\cos(x) = 0$

M

$\cos(x) = 0$

$x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN SERÁN $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

TEMA 11

HOJA 4

$SEN^2(x)+COS^2(x)=1$

15p

④ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{2x} & SI \quad x<0 \\ 1 & SI \quad x=0 \\ \dfrac{x^2-4x}{x^2+x-6} & SI \quad x>0 \end{cases}$

5p

Ⓐ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1-\cos(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1-\cos(x)}{2x}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ ✓

$=\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1-\cos^2(x)}{2x(1+\cos(x))}$ ✓ $=\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{SEN^2(x)}{2x(1+\cos(x))}$ ✓ $=\lim\limits_{x\to0^-} \underbrace{\dfrac{SEN(x)}{x}}_{\to1}\cdot\dfrac{SEN(x)}{2(1+\cos(x))}$

$=\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{SEN(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{SEN(x)}{2(1+\cos(x))} = 1\cdot\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{SEN(x)}{2(1+\cos(x))}$

no es una simplificación

$=\dfrac{SEN(0)}{2(1+\cos(0))} = \dfrac{0}{2(1+1)} = \dfrac{0}{4} = \boxed{0}$ ✓

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-4x}{x^2+x-6} = \dfrac{0^2-4\cdot0}{0^2+0-6} = \dfrac{0-0}{0+0-6} = \dfrac{0}{-6} = \boxed{0}$ ✓

ENTONCES, SABEMOS QUE $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ EXISTE Y ES IGUAL A 0. ✓

SIN EMBARGO, $f(0)=1$, QUE ES DISTINTO A $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.
POR LO TANTO, X ES DISCONTINUA EN $X=0$ NO EVITABLE.

Falta analizar en $x=2$

11/08/22.

(B) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x}{x^2+x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-\frac{4}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}$

$= \frac{1-0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\cos(x)}{2x} = \lim_{x\to-\infty} 1-\cos(x) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} \to 0$

SE SABE QUE $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ENTONCES $-1+1 \leq -\cos(x)+1 \leq 1+1$

$0 \leq -\cos(x)+1 \leq 2$

POR LO TANTO $\lim_{x\to-\infty} 1-\cos(x) \cdot 0 = 0$

$f(x)$ TIENE ASÍNTOTAS HORIZONTALES EN $y=1$, PARA $x>0$, EN $y=0$, PARA $x<0$.

TEMA II HOJA 5

① Ⓐ $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1-(\ln(x))^2}$

$1-(\ln(x))^2 \neq 0$
$-(\ln(x))^2 \neq -1$
$(\ln(x))^2 \neq 1$
$\ln(x) \neq \sqrt{1}$
$\ln(x) \neq 1$
$x \neq e^1$
$x \neq e$

f ES CONTINUA EN $(e^{-3/2}, e^{-1/3})$

$f(e^{-3/2}) = \dfrac{\ln(e^{-3/2})}{1-(\ln(e^{-3/2}))^2} = \dfrac{-3/2}{1-(-3/2)^2}$

$= \boxed{\dfrac{6}{5}}$

$f(e^{-1/3}) = \dfrac{\ln(e^{-1/3})}{1-(\ln(e^{-1/3}))^2} = \dfrac{-1/3}{1-(-1/3)^2}$

$= \boxed{-3/8}$

FALSO. CONSIDERANDO EL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO, NO ES POSIBLE ASEGURAR QUE EXISTA $c \in [e^{-3/2}, e^{-1/3}]$ TAL QUE $f(c) = -2/3$. $\cancel{x}$ $-\frac{2}{3} \notin [-\frac{3}{8}, \frac{6}{5}]$

Ⓑ UNA FUNCIÓN ES IMPAR CUANDO SE CUMPLE QUE $f(-x) = -f(x)$.

UNA FUNCIÓN ES INYECTIVA SI CUANDO $x_1 \neq x_2$ ENTONCES $f(x_1) \neq f(x_2)$. O EQUIVALENTEMENTE, SI $f(x_1)=f(x_2)$, ENTONCES $x_1 = x_2$.

TOMEMOS x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$

$f(x_1) \neq f(x_2)$
$f(-x_1) \neq f(-x_2)$
$-f(x_1) \neq -f(x_2)$

VERDADERO.

11/08/22

C) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$

$= f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x+3)}$

$f(x) = \frac{x-3}{x-2}, \quad x \neq -3$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1.(-6)}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$(x-2)(x+3)$

$\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{2-3}{2-2} = \frac{-1}{0} = \infty$

$\lim_{x \to -3} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-3-3}{-3-2} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}.$

$x = 2$ ES ASÍNTOTA VERTICAL MIENTRAS QUE $x = -3$ NO LO ES.

VERDADERO.

D) SI f ES CONTINUA EN $[1,4]$, SABEMOS QUE EXISTE $\lim_{x \to 1^+} f$, PERO NO PODEMOS AFIRMAR LO MISMO PARA $\lim_{x \to 1^-} f$.

FALSO.

CANTIDAD DE HOJAS ENTREGADAS: 5